CHAPITRE PREMIER

PRELIMINAIRES

TABLES DES ARTICLES

ARTICLE 1 : Systèmes de numération

1. Tout le monde sait qu'on écrit les nombres en utilisant neuf signes

qui suit immédiatement le nombre

appelés chiffres et que le nombre [redacted] neuf s'écrit en reprenant le chiffre représentatif de l'unité, auquel on ajoint le chiffre zéro à droite : c'est le zéro de position. Le cycle des dizaines commence alors avec le nombre dix, qui joue un rôle équivalent à celui de zéro (absence de quantité) et s'étend jusqu'à quatre-vingt dix-neuf qui de quelque façon correspond à neuf. On recommence, à partir de là, à reprendre le chiffre représentatif de l'unité, en lui adjoignant à droite deux zéros et l'on continue à procéder de la sorte indéfiniment :

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
10,	11,	12,	13,	14,	15,	....			99,
100,	101,	....							999,
1000,	1001,	....							9999.

etc.

Les nombres 0, 10, 100, 1000, etc., sont analogues et l'eurythmologie tient compte de cette analogie en posant que toutes les puissances de 10 [redacted]

à l'exception de 1 qui est

dix à la puissance zéro) sont des nombres neutres qui ne modifient pas la structure numérique d'un nombre. Par exemple 17 et 107, qui sont arithmétiquement différents, sont eurythmologiquement apparentés. Il en est de même des nombres 11, 101, 1001, etc. qui sont, eux, analogues à l'unité.

2. Le mot chiffre dérive de l'ancien français cifre, terme qui, jusqu'au XVe siècle, signifiait "zéro". Cifre [redacted] dérive étymologiquement d'un mot arabe signifiant vide. Ainsi, le mot chiffre a d'abord signifié ce que dit zéro : l'absence de toute quantité. Lorsque le terme "zéro" fut adopté à la suite des Italiens, au début du XVIe siècle, pour représenter cette absence, le terme chiffre en vint à désigner les neuf symboles graphiques autres que zéro, et au moyen desquels tous les nombres peuvent être écrits, [redacted] la convention des zéros de position étant acceptée.

3. Ni les Grecs ni les Romains ne possédaient un symbole semblable à zéro et par lequel une numération écrite est indéfiniment possible, et les opérations arithmétiques fondamentales grandement simplifiées. Ne parlons des Romains que pour mémoire ; ils furent des guerriers, des juristes, des constructeurs, des administrateurs, des historiens, et même des poètes ; ils ne donnèrent pas un seul métaphysicien ni un seul mathématicien. Quant aux Grecs, c'est une autre question. Beaucoup plus doués intellectuellement que les Romains, ils furent de grands géomètres et peut-être parce que, [redacted] en mathématiques, ils

héritèrent des Egyptiens ; mais le seul fait qu'ils ignoraient le zéro de position les empêchèrent d'être des algébristes. L'algèbre nous vient de l'Inde par le truchement des Arabes :

> "C'est dans l'Inde, écrit Le Lionnais (1), qu'apparaissent pour la première fois la notion et l'emploi de zéro, aussi bien comme nombre ordinal que comme nombre cardinal (le rang qui précède les autres et, mieux encore, le rang correspondant à une place inoccupée), le zéro devait conférer toute sa fertilité au maniement de la numération de position (décimale ou non) sans laquelle la mathématique occidentale moderne n'aurait pas pu prendre son élan. En hindou, "zéro" se dit shunya qui signifie "le vide". Sous son aspect cardinal (le néant de la quantité) le zéro devait permettre de préciser et en quelque sorte de consolider et même de définir les notions de nombres négatifs et d'infini. C'est à Bhaskara, le plus grand des mathématiciens hindous, qui vivait au XIIe siècle (de notre ère) que l'on doit, en effet, ce qu'il appelle les règles du zéro".

4. Ces règles sont au nombre de 8 :

$$A + 0 = 0 + A = A ;$$
$$A - 0 = A ;$$
$$0 - A = - A ;$$
$$A \times 0 = 0 \times A = 0 ;$$
$$\frac{0}{A} = 0 ;$$
$$\frac{A}{0} = \text{l'infini mathématique} ;$$
$$0^2 = 0 \times 0 = 0$$
$$\sqrt{0} = 0$$

zéro fut introduit dans les calculs

L'invention du zéro et son utilisation dans la numération dite "de position" sont d'ailleurs très antérieures à Bhaskara ; l'on dit que le [redacted] à une date qui se situe entre - 150 et + 150 de notre ère ; et peut-être est-elle encore beaucoup plus [redacted] tôt.

ou

(1) Dans un article d'Approches de l'Inde, numéro spécial des Cahiers du Sud, 1949, p. 254.

5. Les héritiers directs des Hindous furent les Arabes, mais il faut s'entendre. Mohammed ibn-Mûsâ Khwârezmi, mathématicien originaire du Khorassan (le Khwârezmi), qui vivant entre 800 et 825, à Bagdad, sous le calife al-Mamoun (celui-là même qui fit éventrer la pyramide de Khéops pour savoir ce qu'il y avait dedans), put écrire déjà, vers 820, un ouvrage fondamental sur les calculs réalisables au moyen des chiffres indiens (dits "arabes"). Le zéro était symbolisé par un petit cercle, et c'est de l'écriture adoptée par Ibn-Mûsâ que, d'une façon générale, dérivent nos chiffres. Ibn-Mûsâ, tenu pour le plus grand mathématicien "arabe", est appelé le "père de l'algèbre" ; mais Henry Corbin, dans son Histoire de la philosophie islamique (1), fait remarquer fort justement que ce mathématicien illustre "est aussi loin d'être un Arabe que Khiva est loin de La Mecque." Le fait est que la numération de position, même décimale, qui exige un signe indicateur du "vide" vient de l'Inde et les Arabes, c'est-à-dire ceux qui adhèrent à l'islam quelle que soit leur race, n'ont fait que nous la transmettre, notamment par l'intermédiaire des universités arabes de Tolède, Séville et Cordoue. La science dont nous nous occupons n'en était pas moins irradiée de ce grand centre intellectuel qu'était Bagdad aux neuvième et dixième siècles. Là vécurent, outre Khwârezmi, l'encyclopédiste al-Kindi, mort en 873, al-Farabi, mort en 950, et quelques autres savants ou philosophes, de culture arabe, mais orientaux. Ce sont eux qui prirent la suite de la spéculation grecque et élaborèrent des doctrines "dont l'Occident chrétien allait profondément subir l'influence" (2), à partir du moment, - dès le milieu du XIIe siècle, - où les oeuvres écrites en arabe furent traduites en latin (3). Selon L. Hogben, c'est une pièce de monnaie portant la date de 1134 qui fournit le premier témoignage, en Occident, de l'emploi des chiffres arabes.

6. Nous nous étendrons plus tard sur la notion de domaine de nombres, mais il est bon d'en dire déjà quelques mots. Nous avons vu au début de cet article, la suite des nombres, en numération décimale, s'étendant de 0 à 9, ce qui fait 10 nombres, puis de 10 à 99, ce qui fait 90 nombres, plus loin encore, de 100 à 999, ce qui fait 900 nombres, etc. Ce ne sont point là les domaines de nombres. Tout domaine de nombres se prend à partir de zéro. Le premier domaine s'étend de 0 à 9 : ce sont les dix nombres du domaine des nombres de un chiffre. Le second domaine, de 00 à 99, ce qui fait cent nombres de deux chiffres. Le troisième domaine de 000 à 999, ce qui fait mille nombres de trois chiffres, etc. On a remarqué les graphies 00 et 000. Lorsque l'on traite des domaines de nombres, il est bon, en effet, d'écrire les nombres de manière qu'ils comportent tous autant de chiffres que l'exige le domaine dans lequel ils sont pris. Cette exigence est satisfaite au moyen du chiffre zéro posé une ou

(1) NRF, collection "Idées", p. 37.
(2) Etienne Gilson, La Philosophie au moyen âge, Payot, Paris, 1947, p. 346.
(3) Ibid., p. 377.

plusieurs fois à gauche du premier nombre significatif. Cela, qui ne modifie évidemment pas l'écriture des nombres du premier domaine, commence à jouer avec ceux du second qui, comme tous les domaines, commence par le nombre zéro. On aura donc :

00, 01, 02, 03,...., 10, 11.... 99.

Le même principe sera appliqué lorsque l'on passera aux domaines suivants :

000, 001, 002,... 010,011,... 100,... 999
0000, 0001.... 010, 0011,... 0100, 0101... 9999

Il est inutile de dire que les zéros "à gauche" sont sans influence arithmétique sur les nombres dans l'écriture desquels ils entrent ; mais on verra plus tard l'utilité de cette manière d'écrire. Ainsi, le premier domaine de nombres compte dix nombres, de zéro à 9 ; le second domaine, cent nombres, de zéro à 99, le troisième domaine mille nombres de zéro à 999, et ainsi de suite. Dix, cent, mille, dix mille, etc., sont les puissances successives de 10, et dix est le nombre neutre qui, eurythmologiquement, ne modifie pas la structure des nombres. Ceci nous conduit à examiner les diverses numérations et à mettre en évidence l'excellence de la numération décimale.

7(a). Nous ne devons pas confondre base d'un système de numération et base eurythmologique : il sera question de celle-ci un peu plus loin. La base d'un système de numération est le nombre d'unités d'un certain ordre nécessaire pour former une unité d'un ordre immédiatement supérieur. La base universelle est la base dix. Il y a dix unités de 1 à 10, ce qui forme la première dizaine, et il suffit de dix chiffres différents, de 0 à 9, pour écrire tous les nombres entiers possibles. On pourrait tout aussi bien écrire tous ces nombres en adoptant une autre base, la base deux, par exemple, qui définit la numération binaire avec les seuls chiffres 0 et 1 ; ou la base six, avec les six chiffres de 0 à 5 (1), ou, enfin, une base quelconque. Il existe une théorie générale à ce sujet, qui repose sur le fait qu'un nombre fini N étant donné, ainsi qu'un autre nombre entier fini P, choisi comme base, on a toujours :

$$N = aP^n + bP^{n-1} + \dots + kP + \ell,$$

a, b, c... ℓ étant des entiers finis quelconques, mais inférieurs à P. Le nombre P^n est la plus grande puissance de P dont un multiple est inférieur à N. Par exemple, le nombre 1657 peut s'écrire :

$$1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7.$$

---

(1) Dans cette numération sénaire, le nombre six s'écrit 10, puisqu'il n'y a pas de chiffre pour le représenter.

7 [redacted] (b). Qu'elle soit décimale (ou dénaire) ou binaire, ou d'une autre sorte encore, la numération [redacted] n'est possible qu'à la condition d'employer un chiffre totalisateur qui, dans tous les cas, est le zéro de position (à droite), le zéro est l'outil qui permet de résoudre les opérations mathématiques, arithmétiques d'abord, algébriques ensuite (1), sans le secours des abaques ou autres "bouliers compteurs". Plus les chiffres que l'on emploie sont nombreux, plus aussi l'écriture qui répond à ces chiffres est courte; [redacted] inversément, moins les chiffres sont nombreux, plus l'écriture est longue. Si l'on adopte la numération binaire, le nombre deux s'écrira 10 et le nombre quatre 101 ; si l'on adopte la numération duodénaire (base douze), il faudra inventer deux chiffres pour représenter les nombres dix et onze, et ce seront par exemple les chiffres α et β . Alors le nombre douze s'écrira 10.

8. Or, il ne saurait exister une numération utilisant un nombre de [redacted] chiffres inférieur à deux, à moins d'accumuler les points à la manière des pythagoriciens et de passer aux nombres figurés, comme nous le ferons dans la suite de ce chapitre. En tant qu'elle constitue la limite des systèmes de numération, la numération binaire réclame une certaine attention. Il n'en est pas moins vrai que la numération décimale est, comme nous le montrerons, <u>la numération sacrée</u>.

9. Aux yeux du pur mathématicien, le choix d'une base de numération est indifférent ; il suffit, le choix fait, de s'y tenir. Une numération de position n'est ainsi [redacted] qu'un système conventionnel de signes permettant l'écriture des nombres ; et [redacted] si le mathématicien peut trouver plus commode d'utiliser la numération décimale à laquelle il est habitué, rien ne l'empêche, dans certains cas, s'il juge expédient de le faire, d'adopter une autre base. "Les machines à calculer électroniques emploient généralement la numération binaire, réduite aux deux nombres 0 et 1, une pulsation pour 1, une coupure pour zéro. Le caractère "tout ou rien" (oui ou non) de la décharge des neurones est analogue à la discipline du "sens unique" afférente à l'emploi de la numération binaire usuelle dans les machines à calculer les plus perfectionnées (...) Il est admis maintenant que le cerveau humain se sert intuitivement de la numération binaire" (2). Sans doute ; mais, afin de ne pas tomber dans des rêveries délirantes qui ont tendance à embrumer certains cerveaux, on évitera d'oublier que c'est le cerveau humain qui a inventé les machines à calculer à numération binaire, et non l'inverse...

---

(1) L'algèbre commence avec l'usage des nombres négatifs plus petits que zéro.
(2) Matila Ghyka, <u>Philosophie et mystique du nombre</u>, Paris, Payot, 1952, p. 179.

10. Leibniz, préoccupé, comme avant lui l'avaient été Raymond Lulle et l'abbé Trithème, d'établir une "caractéristique universelle", c'est-à-dire "une sorte d'algèbre générale rendue applicable à des notions de tout ordre, au lieu d'être restreinte aux seules notions quantitatives" (1), crut trouver dans ce que l'on appelle les hexagrammes de Fo-Hi, qui sont au nombre de 64, une confirmation de ses idées sur la numération binaire ; et selon ce que dit René Guénon à ce sujet, c'est là tout ce qu'il y vit, alors que nous le [redacted] montrerons plus tard dans la partie de cet ouvrage consacrée au taoisme, les linéations de Fo-Hi, les trigrammes d'abord, les hexagrammes ensuite, ont une signification essentiellement métaphysique, quand même les devins [redacted] les auraient utilisés à des fins plus que douteuses.

---

(1) René Guénon, <u>Orient et Occident</u>, Paris, Editions traditionnelles, 1947, p.64.

ARTICLE 2 : La numération décimale

1. On peut expliquer l'universalité de la numération décimale de trois façons, et d'abord par le hasard, ou plutôt, comme le dit un auteur (1), par une "coïncidence véritablement merveilleuse". Des coïncidences de ce genre étonnent au point que l'on en vient à se demander s'il s'agit vraiment de coïncidences, ce terme impliquant l'idée de hasard, et non celle d'un effet nécessaire produit par une cause qu'il resterait à déterminer. En second lieu, on explique l'universalité de la numération décimale par le fait que l'homme a commencé à compter sur ses doigts. L'explication est de nature à satisfaire tous ceux, et ils sont légion, qui éprouvent un véritable sentiment de répulsion à l'annonce qu'on leur fait d'une vue métaphysique. Ce sont souvent d'excellents esprits dans la sphère où leurs pensées se meuvent et en même temps des esprits incapables de dépasser le niveau du pragmatisme utilitaire le plus simpliste. Leur horizon mental ne s'étend pas plus loin que le sociologique ; et tout ce qui dépasse cet horizon est pour eux, indifféremment du "mystique" ou du "magique" même lorsqu'il n'y a pas la moindre trace de magie ou de mysticisme dans ce qu'ils rejettent avec indignation.

2. Un de ceux que je dis, professeur à l'université d'Aberdeen, auteur d'un gros livre qui ambitionne de mettre les mathématiques à la portée de n'importe qui (2), a ses idées bien arrêtées sur la numération décimale. "Les avantages de la numération hindoue n'ont rien à voir avec les propriétés mystérieuses du nombre dix. Au contraire, les propriétés du nombre dix sont simplement dues au fait que les chiffres numériques hindous furent introduits pour convenir à un abaque sur lequel les exposants augmentent d'une unité lorsque la valeur des boules augmente de dix. On a choisi d'abord dix parce que l'homme se servait de ses dix doigts pour compter. Supposez que nous soyons tous manchots. Alors nous compterions par cinq...". Assurément. Et si, au lieu que la main comporte cinq doigts, elle en comptait sept, nous aurions une numération basée sur quatorze. Mais il se trouve que nous avons dix doigts en tout, <u>avec lesquels nous agissons sur le monde</u> ; et lorsque nous regardons nos paumes, nous voyons un pouce à droite et un pouce à gauche et, de chaque côté, bien distingués de ces pouces, quatre doigts, à gauche ou à dr te du pouce. Ainsi nous n'avons pas tout uniment dix doigts, mais deux fois

---

(1) Dr Allendy, <u>Le Symbolisme des nombres</u>, Paris, Chacornac éditeur, 1948, p. 282.

(2) Lancelot Hogben, <u>Les mathématiques pour tous</u>, Payot, Paris, 1947, p. 301.

(1 + 4) doigts. La question à poser est donc de savoir pourquoi nous avons dix doigts, et non pas huit ou quatorze. Nous touchons ici à la troisième explication de la numération décimale. C'est la bonne, n'en déplaise aux rationalistes et aux pragmatistes, dont le professeur Hogben nous offre le parfait modèle. S'il est dans la nature des choses que la suite des unités soit un, dix, cent, mille, dix mille, et ainsi de suite, c'est bien parce que nous avons dix doigts, et que ce n'est pas par hasard mais tout au contraire à cause des propriétés "mystérieuses", comme dit le professeur que je viens de citer, du nombre dix. Ces propriétés résident dans le fait que le Verbe divin, <u>per quem omnia facta sunt</u>, se présente à notre esprit, ainsi que l'enseigne la Kabbale juive, sous <u>dix</u> aspects archétypiques fondametaux (les dix <u>Sephiroth</u>); et la Kabbale insiste : "dix, et non point neuf, dix et non point onze". Nous aurons l'occasion de reparler longuement de cette doctrine.

3. Dieu a opéré la création par les dix archétypes qui sont les dix aspects essentiels du Logos. De même, l'homme agit sur le monde par l'intermédiaire de ses dix doigts. Et c'est encore pour cette même raison, très profonde et très mystérieuse, qu'Aristote a compté infailliblement dix <u>catégories</u>, c'est-à-dire dix genres absolument généraux sous lesquels viennent se ranger, selon leur nature, toutes les notions [redacted] affirmativement ou négativement attribuables [redacted] à un sujet logique. Et c'est toujours pour cette raison mystérieuse et très profonde que les pythagoriciens vénéraient la <u>Tétraktys</u> :

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10,$$

et que [redacted] les commandements divins (enseignés par Moïse) sont au nombre de dix.

4. Voici comment s'exprimait Agrippa de Nettesheim, médecin et philosophe (1), dans sa <u>Philosophie occulte</u> (1531) :

> "Dix est appelé le nombre de tout, ou universel, le nombre complet marquant le plein cours de la vie, car l'on ne compte plus depuis ce nombre que par réplique, et il implique en soi tous les nombres, ou il les explique par les siens en les multipliant. Ce nombre est circulaire, de même que l'unité, parce qu'étant accumulé, il revient à l'unité, d'où il sort ; et il est la fin et le complément de tous les nombres et le principe des dizaines. De même que le dixième

---

(1) Né à Cologne en 1486, ce personnage enseigna à Dôle, Londres, Cologne, Paris Metz, Fribourg et Lyon. Médecin de Louise de Savoie, mère de François Ier, historiographe de Charles-Quint, il mourut assez misérablement dans un hôpital de Grenoble en 1533.

~~nombre~~ nombre reflue sur l'unité, d'où il a tiré son origine, ainsi tout flux retourne à ce qui lui a donné le principe de son affluence : ainsi l'eau court à la mer, d'où elle sort, le corps à la terre, d'où il est tiré, le temps à l'éternité, d'où il découle, l'esprit à Dieu, qui l'a fait, et toute créature s'en va au néant dont elle a été créée".

5. Le lecteur est en droit de se demander ce qui autorise à déclarer que la numération décimale est universelle, ou presque. Nous avons dit que l'adoption partout, ou à peu près, de la base de numération dix n'était pas le fait du hasard, mais qu'elle était au contraire imposée par une raison supérieure et très profonde. L'universalité de la numération décimale, avec ou sans zéro de position, est incontestable. Voyons cela.

En Egypte ancienne (1), le signe de l'unité arithmétique était un trait vertical. Jusqu'à neuf, on traçait, tantôt sur une ligne, tantôt sur deux, autant de ces traits que le nombre à exprimer compte d'unités. Le zéro de position était ignoré. Le signe du nombre dix était une sorte d'arceau ou, si l'on préfère, un U renversé. On comptait les dizaines de la même façon que les unités sur une ligne ou sur deux. Un nombre composé de dizaines et d'unités s'écrivait en combinant ces signes, et il en existait d'autres pour les centaines, les milliers, les dizaines de mille et les centaines de mille. Cette numération de position était déjà en usage au début des premières dynasties, c'est-à-dire vingt-sept ou trente siècles avant notre ère.

6. Remarquons que l'absence du zéro de position, qui nous paraît un obstacle très sérieux à la manipulation des nombres élevés, n'est cependant pas incompatible avec une science fort développée, évidemment différente de la nôtre par ses formes d'expression. La conception et l'exécution d'un monument aussi extraordinaire que la pyramide de Khéops (vers 2785) attestent des connaissances étendues, même en mathématiques. D'un autre côté, nous ne savons rien de celles qui étaient enseignées dans les temples, et par conséquent réservées à une élite. Si l'on suppose que l'enseignement était oral, comme chez les Pythagoriciens, on comprend qu'il n'en soit resté aucune trace.

7. Quelques peuples amérindiens (2) usaient du système décimal avec certaines variantes. Les Mayas, par exemple, se servaient de la base vingt, mais non exclusivement. On constate qu'il en était de même chez les Celtes

---

(1) O. Gillain, La Science égyptienne, édition de la Fondation égyptologique Reine Elisabeth, Bruxelles, 1927, pp. 18 et suiv.
(2) Certains sont peut-être une lointaine postérité des Atlantes. C'est probablement le cas des Toltèques.

comme en témoignent les anciennes expressions françaises de <u>six-vingt</u>, <u>quinze-vingt</u> et, de nos jours encore, <u>quatre-vingt</u>. Les Incas chiffraient au moyen de noeuds : à boucles simples pour dire les unités, à boucles doubles, les dizaines, à boucles triples, les centaines, et ainsi de suite. La division administrative des populations de l'Empire atteste l'utilisation systématique de la numération décimale : dix familles étaient placées sous l'autorité d'un chef, le <u>chunca-camayoc</u> (<u>chunca</u> signifie dix) ; dix fois dix familles sous celle d'un fonctionnaire d'un rang plus important, le <u>pacha-camayoc</u> (<u>pacha</u> signifie cent) ; ~~deux huaranga-camayoc~~ dix fois dix fois dix familles sous celle d'un <u>huaranga,-camayoc</u> (<u>huaranga</u> : mille). Au-delà encore dominait le <u>huno-camayoc</u> (<u>huno</u> : dix mille) (1).

9. Les anciens Chinois (et par la suite les Japonais dont les Chinois furent les premiers éducateurs) utilisaient deux systèmes. D'une part, la numération décimale, avec neuf signes et le zéro de position de forme circulaire : c'étaient les dix tiges (<u>Kan</u>). D'autre part, et dans des cas particuliers, douze autres signes, les douze branches (<u>tché</u>). Le terme <u>tchou</u> (nombre) désignait et les "tiges" et les "branches" (2).

Il est évident que les douze <u>tché</u> prouvent l'existence, dans l'antiquité chinoise, d'un système de numération de base douze destiné à faire ressortir l'importance arithmosophique des nombres multiples de douze, et en particulier des nombres 144, 216 et 360 (3). Cela ne contredit pas le fait que [redacted] la numération chinoise était foncièrement décimale : les cinq premiers nombres étaient représentés au moyen de traits répartis en groupes, parallèlement ; les quatre derniers, respectivement par un, deux, trois, quatre traits branchés perpendiculairement sur un autre.

---

(1) R. Karsten : <u>La Civilisation de l'empire inca</u>, Payot, Paris, 1952, p. 97.

(2) Marcel Granet, <u>La Pensée chinoise</u>, Renaissance du livre, collection "Evolution de l'humanité", Paris, 1934, pp. 151 et suiv. Selon cet auteur, les Chinois auraient même possédé trois séries de chiffres, l'une dénaire, l'autre duodénaire, la troisième décimale. De toute façon, quand bien même les chiffres différeraient d'une série à une autre, il n'y a pas de différence entre une numération dénaire et une numération décimale, à moins que cette dernière seule ait comporté le zéro de position.

(3) M. Granet, <u>op. cit.</u>, pp. 149 à 299, <u>passim</u>. 360 est le nombre classique de la circonférence : 10 x 3 x 12 ; il a été aussi, dans certains cas, le nombre de jours que comportait l'année, auquel les anciens Grecs ajoutaient les cinq jours "épagomènes".

9. Les anciens Chinois n'accordaient que peu d'attention aux mathématiques telles qu'elles furent cultivées par les Hindous, les Grecs et les Arabes. En revanche, ils étaient extrêmement sensibles à la beauté des ensembles harmonieux. Les séries dénaires et duodénaires se rapportaient à des [redacted] touts concrets situés dans l'espace et dans le temps; les nombres n'étaient qu'accessoirement [redacted] des résultats d'opérations arithmétiques bien définies. Fait à noter et dont nous nous souviendrons plus tard, les nombres du système duodénaire étaient disposés sur la <u>circonférence d'un cercle</u>, tandis que ceux du système dénaire étaient rassemblés [redacted] dans des dispositifs <u>carrés</u>. Comme nous traiterons plus ~~loin~~ bas de la question des numérations duodénaire (ou duodécimale) ~~parallèle à la numération~~ et dénaire (ou décimale) nous bornerons ici à ces quelques remarques (1).

10. Passons en Basse-Mésopotamie. Nous voyons que dès la période dite de Djemdel-Nasr, parallèle à l'époque thinite égyptienne (3197-2778 selon les uns, 3000-2770 selon les autres), les Sumériens disposent également de deux numérations, l'une décimale, l'autre sexagésimale. En Elam aussi les "unités" successives sont 1, 10, 60, 100, 600, etc., et le zéro de position est inconnu. Il est probable, mais non prouvé, qu'en pays sumérien et en Elam, comme en Chine, la numération sexagésimale, ou sénaire, dérive de considérations extrêmement anciennes où la circonférence du cercle, que nous divisons encore en 360 degrés (2), joua un rôle déterminant. Une question est de savoir pourquoi la circonférence est divisée en 360 degrés et, le Zodiaque, connu dès la plus haute antiquité, et un peu partout, divisé en douze signes de trois décans, chacun de ceux-ci comportant dix degrés. Nous essayerons de répondre à cette question. Une autre question est celle de la numération décimale et des interférences qui ont pu se produire entre les deux systèmes. A vrai dire, il n'existe pas contradictoirement deux numérations se posant en rivales l'une de l'autre. La numération décimale est un fait ; la division de la circonférence en 360 degrés en est un autre, dont [redacted] l'origine se perd dans la nuit des temps. Un troisième fait est [redacted], que les deux systèmes ont interféré et donne cette numération bâtarde où les puissances de dix alternent avec les multiples de six.

---

(1) Il n'y a pas de différence essentielle entre "dénaire" et "décimal", quand il s'agit de la <u>numération</u> dont la base est dix. Il en va autrement quand il s'agit de <u>nombre</u>. Le nombre décimal s'oppose alors au nombre entier.

(2) De même que nous divisons encore le jour en deux fois <u>douze</u> heures, l'heure en cinq fois <u>douze</u> minutes et la minute en cinq fois <u>douze</u> secondes.

11. Nous l'avons dit, ni les Grecs ni les Romains ne possédaient le zéro de position, et nous avons ajouté que ce défaut avait entravé l'essor d'une algèbre grecque. C'est qu'à la notion de zéro est liée, nécessairement, la notion de nombres négatifs avec lesquels commence l'algèbre. Nous allons voir dans un instant que l'absence du zéro de position n'est pas forcément une entrave à des calculs arithmétiques compliqués ; et cette remarque vaut pour les Egyptiens aussi bien que pour les Grecs.

Chez ceux-ci, les neuf premières lettres de l'alphabet, y compris le digamma, représentaient l'unité et les huit premiers nombres ; les neuf lettres suivantes, y compris le koppa, les dizaines ; les neuf suivantes encore, avec le sampi, les centaines. Malgré cette indigence, un mathématicien comme Archimède, - mais peut-être disposait-il de certains moyens d'écriture qui nous sont inconnus, - a pu entreprendre, au troisième siècle avant notre ère, de nombrer les grains de sable que contiendrait un globe, l'arénaire, qui aurait pour rayon la distance, telle qu'Archimède l'estimait, de la terre à la voûte étoilée. Archimède arriva ainsi à énoncer une multitude que nous concevrions, nous, comme l'unité suivie de huit cent millions de zéros, - de sorte que "pour écrire ce nombre, à raison d'un chiffre par seconde, et de dix heures d'écriture par jour, il faudrait environ soixante ans" (1).

12. Les Arabes reçurent leurs chiffres et le zéro des Hindous. Ils nous les transmirent [redacted], entre le Xe et le XIe siècles, grâce notamment au célèbre ~~XXXXXXX~~ d'Aurillac qui, avant de devenir le pape Sylvestre II, en 999, avait résidé trois ans en Espagne, terre de haute culture arabe : l'Espagne fut un des deux canaux par lesquels s'exerça en chrétienté l'influence arabe, le second ayant été les multiples contacts des croisés avec leurs adversaires orientaux (2). Fait à noter, Gerbert d'Aurillac n'introduisit en Occident chrétien que les chiffres de 1 à 9. Le zéro ne fit son apparition qu'au XIIe siècle. On put écrire alors le nombre dix au moyen du chiffre de l'unité et du chiffre du "vide" et, par le procédé que nous connaissons, chiffrer n'importe quel nombre, indéfiniment.

Gerbert

---

(1) Edouard Callendraux, Célèbres problèmes mathématiques, Albin Michel, Paris, 1949, p. 14.

(2) Gerbert d'Aurillac fut, en son temps, un personnage assez extraordinaire. Il s'intéressa à la musique tout autant qu'à l'arithmétique et à l'astronomie. Il s'occupa même d'alchimie qui n'avait pas alors la triste réputation que, de nos jours, on lui a faite par simple ignorance. On attribue à Gerbert la construction d'un globe céleste reproduisant le mouvement des astres et l'invention d'un orgue hydraulique.

13. La numération décimale est universelle parce qu'elle est la numération sacrée, la numération divine, voulue par Dieu. Je sais bien que le pur mathématicien, le mathématicien qui n'est que cela, jugera cette affirmation extravagante, je l'ai ~~dixxdéjàx~~ déjà dit. Mais le mathématicien qui, par ailleurs, est souvent un cerveau au service d'une technologie, est incompétent dans les matières qui relèvent de la tradition. Il ne voit pas, ou il ne voit plus, dans les nombres qui sont sa spécialité, les reflets des archétypes divins. Les mathématiques, comme bien d'autres disciplines d'ailleurs, se sont voulu autonomes et ont rejeté les liens qui, jadis, les rattachaient à la métaphysique et, par celle-ci, à la Sagesse de Dieu. Un mathématicien pur rougirait de parler de métaphysique, parce que la métaphysique est à ses yeux le comble du nébuleux et de l'insignifiant. Assurément, les mathématiques sont devenues l'instrument souverain de l'action de l'homme sur le monde et par conséquent du "progrès technique" et elles s'en font gloire ; mais elles ont perdu leur âme.

ARTICLE 3 : Additif à l'article précédent

1. Le nombre dix a donc l'honneur d'être le premier reflet, la première amplification de l'unité, et non pas, par exemple, le nombre 9 ou le nombre 11. L'écriture de dix au moyen du chiffre 1 et du chiffre 0 ne doit pas faire illusion. C'est bien de la multitude dix qu'il s'agit et non de la chiffraison 10. Cela étant, eurythmologiquement un (c')est dix, dix (c')est un et bien entendu cela peut se dire aussi bien de toutes les puissances de dix. Pic de la Mirandole a écrit : "Celui qui connaît la vertu du nombre Dix et la nature du premier nombre sphérique (qui est cinq) aura le secret des cinquante portes de l'intelligence, du grand Jubilé, de la millième génération et du règne de tous les siècles" (1). La numération décimale est la numération sacrée.

2. Néanmoins, certains mathématiciens ont cru devoir faire observer qu'une numération construite sur la base douze (2) conviendrait mieux que la numération décimale, car dix n'est divisible que par deux et cinq, tandis que douze est divisible par deux, trois, quatre et six, ce qui est de nature à présenter bien des commodités aux calculateurs. C'est pour cette raison que Simon Stévin de Bruges, en son temps (1548-1620)[redacted], s'était fait le champion de la numération duodécimale.

3. De leur côté, les historiens des sciences, multiplient les hypothèses pour expliquer la numération sexagésimale des Mésopotamiens. Abel Rey lui assigne une origine sumérienne, par conséquent ni sémite, ni indo-européenne : la numération décimale serait akkadienne, c'est-à-dire importée en pays sumérien par les Sémites envahisseurs (3). Cet auteur (4) ne porte aucun intérêt au fait que des nombres tels que le sargal (60 à la quatrième puissance, soit

---

(1) Rapporté par A. Allendy, op. cit., p. 280.
(2) On écrirait zéro ; puis les neuf chiffres classiques, puis A et B (ou α et β) pour représenter les nombres dix et onze. Ensuite viendrait 10, lu douze.
(3) Akkard, ville de la Basse-Mésopotamie, fut la capitale d'un empire sémite qui absorba la civilisation sumérienne.
(4) Abel Rey, La Science orientale avant les Grecs, Albin Michel, collection "Evolution de l'humanité", Paris, 1942, pp. 112 et suiv. L'ouvrage est une mine de renseignements précieux, mais Abel Rey, comme tous les auteurs qui ont collaboré à la collection "Evolution de l'humanité" est obnubilé par les idées de "mentalité primitive" et de "progrès scientifique".

12960000, le gès-u (60), le sar (60 au carré, soit 3600) et le grand sar (60 au cube, soit 216000) sont, de la façon la plus nette, dérivés de la Grande Année solaire de :

$$25920 = 10 \times 2 \times 36^2.$$

Cette Grande Année, bien connue de la tradition hindoue, est approximativement le temps qu'il faut au soleil pour épuiser le Zodiaque "à reculons" [redacted]. La circonférence, dans ce contexte de pensée, compte 360 degrés, chaque degré 60 minutes et chaque minute 60 secondes. Aussi les nombres 25920, 12960 et 360 sont-ils les nombres cycliques par excellence : et nous verrons qu'il y a tout lieu de penser que ces divisions, sur lesquelles est basée l'astrologie hindoue, viennent des Atlantes antédiluviens. [redacted]

: C'est la précession des équinoxes que nous étudierons dans un autre chapitre.

4. Ces nombres cycliques, que l'on retrouve en Chine, et auxquels il faut ajouter 108, 144, 216 et 432, sont tous des multiples de 12 ; ils sont imposés par les conditions d'espace et de temps de l'univers dans lequel nous vivons et qui nous sert d'horloge. On conçoit sans difficulté leur utilisation en marge de la numération décimale, et l'on peut penser que les Sémites, conquérants du pays de Sumer en Basse-Mésopotamie, ont adopté ces nombres "circonférenciels". Comme on retrouve ces nombres dans l'ancienne Chine, [redacted] nous sommes conduits à postuler une civilisation très reculée, dont relèveraient les Chinois, les Elamites, les Sumériens et les populations du bassin de l'Indus (sites de Harapa et de Mohenjo-Daro), ces dernières étant très antérieures à l'entrée en Inde des Indo-Européens. Ceux que nous appelons les Indiens occupèrent le nord de l'Inde par vagues successives. Les premiers arrivants, les proto-Indiens, apparentés aux Mitaniens, s'installèrent dans le Sindh et le Penjab au cours du troisième millénaire. Ils furent suivis par les Indiens ~~dits~~ "védiques", ainsi appelés parce qu'ils étaient en possession de la partie la plus ancienne des Vêdas, qui entrèrent dans la péninsule à une date relativement récente, entre 1500 et 1200. Eux aussi se heurtèrent à des foyers de civilisation qui ne seraient pas sans rapport avec la civilisation chinoise. Bien des choses s'expliquent alors, car les gens de Sumer, d'Elam, de Harapa, de Mohenjo-Daro, et du fleuve Jaune n'étaient ni des Sémites, ni des Indo-Européens, ni des Chamites (ou Hamites). Cela signifie, comme nous le verrons aussi plus tard, qu'ils n'étaient pas de la postérité de Noé, à supposer qu'un personnage portant ce nom, et père de Sem, Cham et Japhet, ait réellement existé ; et c'est jusque-là, croyons-nous, qu'il faut remonter pour trouver la plus ancienne trace des nombres cycliques duodénaires.

5. Nous en revenons ainsi à la supposition que nous avons faite à l'article précédent : un amalgame à peu près inévitable s'est fait entre la numération décimale et le système des nombres cycliques. Je ne dis pas que ceux qui étaient primitivement en possession de ce système ne possédaient pas eux-mêmes la numération décimale ; je le suppose, au contraire, en ajoutant qu'ils ne confondirent jamais leurs nombres cycliques et leur numération. Je dis seulement que le mélange a pu se faire quand apparurent les Sémites et les Indo-Européens ; les Sémites surtout, et en Mésopotamie. Les Indiens (1) surent éviter la confusion ; leur numération était rigoureusement décimale, bien qu'ils eussent cultivé les nombres cycliques. Ce fut le contraire en Mésopotamie, au temps des Sémites (civilisations akkadienne, puis babylonienne) qui anéantirent la civilisation "asianique" de Sumer à laquelle ils se heurtèrent. Ils l'anéantirent, certes, mais non sans lui emprunter bien des choses, et notamment les nombres cycliques et des vocables ~~mots~~ (les rituels des prêtres sémites conservèrent même des bribes de sumérien).

6. Il y eut incontestablement, aux temps tardifs des Assyriens, une numération bâtarde où l'on comptait décimalement jusqu'au nombre cinquante-neuf, puis sexagésimalement, à partir des multitudes supérieures à soixante, au moins dans certains cas. Il est clair que si la numération avait été purement sexagésimale, le nombre six eût été l'unité immédiatement supérieure à un. Les Akkadiens sémites représentaient l'unité arithmétique par un trait cunéiforme vertical, et ils faisaient usage de ce signe jusqu'au nombre neuf. A partir de dix, ils employaient une sorte de crochet ; la centaine était représentée par un trait vertical accolé à un trait horizontal ; et le nombre mille s'écrivait au moyen d'un crochet suivi du signe de la centaine, ce qui voulait dire proprement "dix fois cent" (2).

---

(1) J'appelle Indiens les habitants de l'Inde en général, et Hindous ceux de ces habitants qui appartiennent à l'hindouisme, issu du védisme.

(2) R. Allendy, op. cit., p. 287. Il se peut que ces détails soient discutés. Ce qui demeure, l'essentiel, c'est ~~la~~ double base, ~~[illegible]~~
(l'utilisation simultanée d'une

ARTICLE 4 : Les nombres figurés

1. Les figures géométriques régulières (1) sont délimitées par des points. Deux points pris sur la droite déterminent un segment quelconque que nous appellerons le segment unitaire : rien ne le mesure (il est quelconque) et il est, en revanche, un étalon de mesure ~~des~~ possible pour d'autres grandeurs. Trois points non en ligne droite, et par conséquent dans le plan, déterminent deux figures régulières distinctes, le cercle et le triangle équilatéral. Celui-ci ~~étant~~ est formé de trois segments unitaires, celui-là est la figure courbe régulière qui peut avoir pour rayon le segment unitaire. L'inscription de figures droites, construites à partir du segment unitaire dans ~~un~~ le cercle pose aussitôt un problème : le cercle étant donné, à partir du segment unitaire, il est possible d'~~y~~ inscrire un triangle équilatéral, mais alors le côté de celui-ci sera plus grand que le rayon ; inversément, le triangle équilatéral étant construit à partir du segment unitaire, il est possible de tracer la circonférence d'un cercle passant par les trois sommets du triangle ; mais alors le rayon du cercle sera plus petit que le segment unitaire. Cette remarque s'étend, avec des modifications appropriées, à toute figure formée par un polygone régulier inscrit dans ~~un~~ le cercle ; mais la question qu'elle pose est en dehors de notre sujet.

2. J'ai supposé connue du lecteur la notion d'espace géométrique. Sans dimension, c'est le point indivisible ; à une dimension la droite : à deux dimensions, le plan. Dans le plan, il existe un nombre illimité de polygones réguliers inscriptibles dans un cercle ; mais dans l'espace à trois dimensions, il n'existe que cinq solides réguliers inscriptibles dans ~~une~~ la sphère, [redacted] que l'on peut aussi supposer construite à partir du segment unitaire. Ce sont les cinq solides platoniciens. Et dans l'espace à quatre dimensions, l'hyper-espace, qui est une vue de l'esprit puisque l'espace de l'expérience sensible ne compte que trois dimensions, il existe six hyper-solides réguliers.

3. Toute figure géométrique régulière concevable dans un espace est limitée par un certain nombre de points, et il convient de prendre tout d'abord cette figure sous son aspect le plus [redacted] élémentaire, [redacted] l'aspect unitaire. Deux points [redacted], déterminent le segment de droite unitaire ; trois points le triangle équilatéral, le plus simple de tous les triangles ; quatre points, le carré, le plus simple des quadrilatères ; cinq points, le pentagone

(1) Une figure géométrique est régulière quand les éléments qui la constituent sont égaux, selon leur nature, côtés, angles, faces, etc. Ainsi, dans l'espace plan (à deux dimensions), le triangle équilatéral est régulier parce que ses trois côtés et ses trois angles sont égaux. Il en est de même mutatis mutandis, du carré, du pentagone régulier, etc.

régulier non étoilé (1). Lorsque l'on considère l'espace à trois dimensions, le premier solide régulier, le tétraèdre ou pyramide à quatre faces, est déterminé par quatre points, l'octaèdre par 6, le cube par 8, l'icosaèdre par 12 et le dodécaèdre par 20.

Chacune des figures régulières, planes ou stéréomorphiques, est susceptible, dans son espace, d'une croissance régulière et illimitée sur la base du segment unitaire, croissance qui donne naissance à une suite de nombres appelés nombres figurés. La suite qui correspond à la croissance du segment unitaire est la suite naturelle des entiers finis ; celle qui correspond à la croissance du triangle équilatéral est la suite des nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, 12, 21, etc. ; celle qui correspond à la croissance du carré est celle des nombres carrés, 1, 4, 9, 16, 25, etc. Chacune de ces suites dérive de l'unité ponctuelle. Pour toute figure géométrique régulière, et quel que soit l'espace, une telle suite existe et est connue ou connaissable.

4. Les nombres figurés n'intéressent en général que très peu les mathématiciens ; à coup sûr, ils n'intéressent pas les mathématiciens qui sont plus sensibles à la finalité utilitaire et technologique de leur science qu'à l'harmonie des proportions. Aux yeux de ces derniers, les nombres figurés sont des amusettes, des "récréations mathématiques". Or, il s'agit de bien autre chose ; et, à la vérité, dans ce que l'on appelle la "théorie des nombres", les nombres figurés occupent une place considérable. Je n'ai pas la prétention, dans cette Introduction à l'Eurythmologie, d'épuiser le sujet. D'abord, d'autres plus qualifiés que moi le feraient de la manière qu'exige l'approche convenable de cette question ; ensuite, n'ayant en vue que les nombres triangulaires et carrés, et accessoirement les nombres cubiques ou pyramidaux, je dois de toute façon me restreindre et ne dire que ce qui me paraît essentiel à la bonne compréhension des thèmes de ce livre.

---

(1) Cinq points aussi déterminent le pentagone régulier étoilé ; mais comme les côtés de cette figure se coupent, celle-ci comprend en réalité dix points. ~~[illegible]~~ une remarque ~~[illegible]~~ analogue peut être faite à propos de tous les polygones présentant un aspect étoilé et un aspect non étoilé.

5. On appelle <u>polytopes</u> ces figures géométriques régulières susceptibles d'être représentées par des nombres figurés, [redacted] établie la relation la plus étroite et la plus fondamentale que l'on puisse concevoir entre les <u>formes</u> et les <u>nombres</u> ; et l'on appelle <u>simplex</u>, la figure régulière la plus simple que l'on discerne dans chaque espace. Les simplex successifs sont le point; le segment de droite unitaire, déterminé par deux points dans l'espace à une dimension ; le triangle équilatéral [redacted], déterminé par trois points non en ligne droite dans l'espace plan à deux dimensions (1) ; le tétraèdre, pyramide à quatre faces triangulaires équilatérales, déterminé, par quatre points non situés dans le même plan ~~dans~~ au sein de l'espace stéréomorphique à trois dimensions. Dans l'espace à quatre dimensions, le simplex est le pentaédroïde, ou hyper-pyramide, limité par cinq tétraèdres à trois dimensions : cette figure, de toute façon, est hors de notre propos.

de sorte que se trouve

sur la base du segment unitaire

toujours sur la même base,

6. Dans l'espace à trois dimensions, les polytopes inscriptibles dans la ~~une~~ sphère (les solides platoniciens) sont au nombre de cinq avec les caractéristiques suivantes :

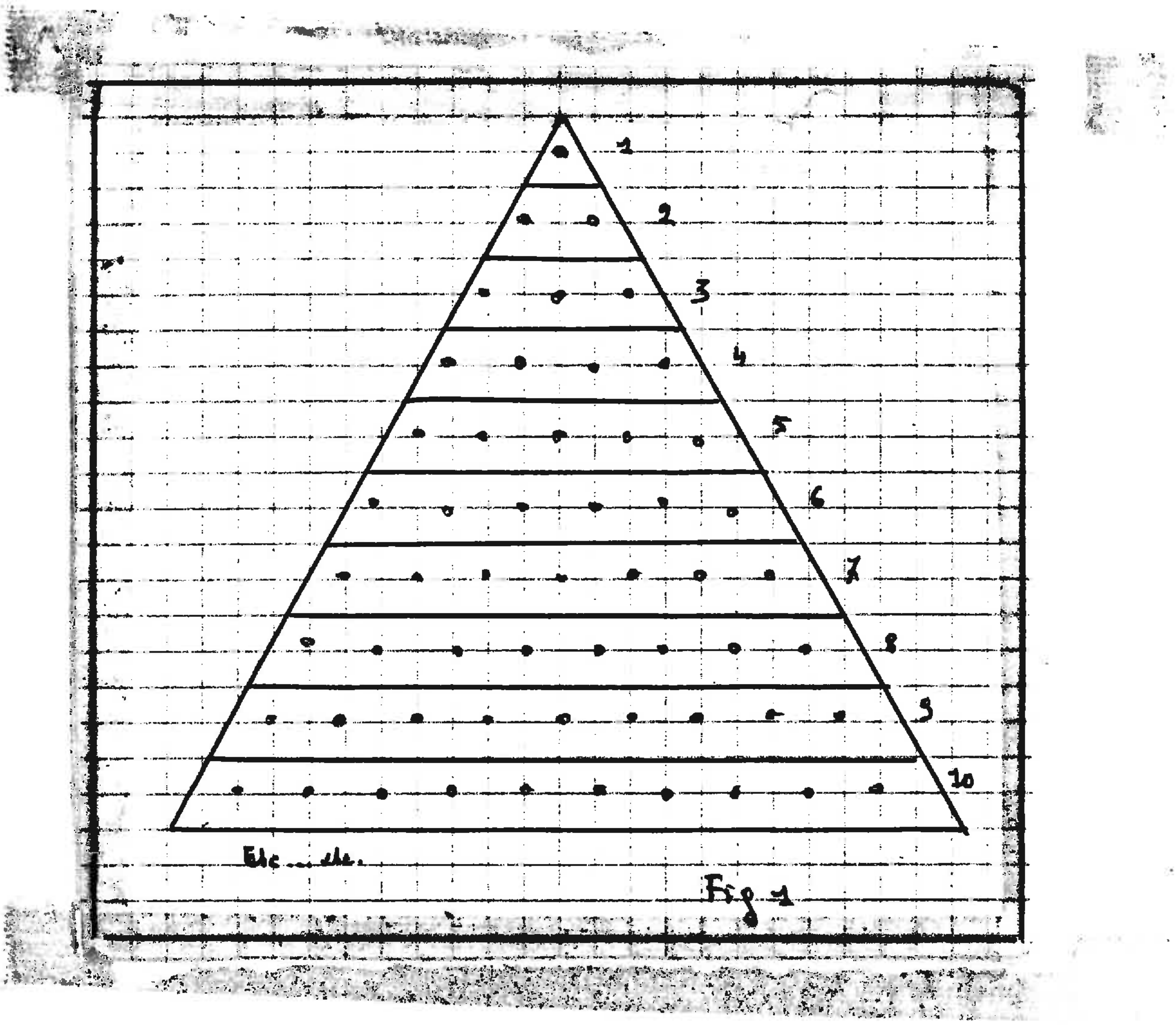
	sommets	côtés	faces
– le tétraèdre :	4	6	4
– le cube :	8	12	6
– l'octaèdre :	6	12	8
– le dodécaèdre :	20	30	12
– l'icosaèdre :	12	30	20

(1) Les simplex sont <u>droits</u>. Trois points non en ligne droite déterminent aussi un cercle ; mais avec cette figure <u>courbe</u> apparaît le nombre non entier et indéfini π , rapport du diamètre du cercle à sa circonférence. Or les nombres figurés ne concernent que les figures droites. [redacted]

ARTICLE 5 : Les nombres figurés triangulaires

1. Les pythagoriciens représentaient les nombres entiers par des points, l'unité arithmétique elle-même étant le point indivisible initial. Le nombre deux était donc figuré par deux points, le nombre trois par trois points, et ainsi de suite. Ces points pouvaient être disposés géométriquement de diverses façons; et, d'après la manière qui consiste à disposer sur une ligne droite des points à distance égale l'une de l'autre, selon le segment unitaire, la première figure à considérer est le triangle équilatéral (figure 1).

FIGURE N° 1



2(a). Par rapport à un nombre entier quelconque K, le nombre suivant, que les Grecs appelaient un gnomon, s'ajoute à lui. De la sorte, un nombre triangulaire est la base d'un triangle équilatéral dont le sommet est le nombre 1. Tout nombre triangulaire, à l'exception du nombre 1, est donné par la somme de

le nombre et de

ceux qui le précèdent. Ainsi le nombre triangulaire 6 est donné par la somme :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Le triangle d'un nombre est donc la somme de ce nombre et de tous ceux qui le précèdent. Nous représenterons cette notion de triangle, appliquée à un nombre, par la lettre grecque majuscule delta. Nous écrirons donc :

$$\Delta 6 = 21$$

ce qui se lira : le triangle de 6 est 21. Nous aurons ainsi successivement :

$$\begin{aligned}
\Delta 1 &= 1 && = 1\\
\Delta 2 &= 1 + 2 && = 3\\
\Delta 3 &= 1 + 2 + 3 && = 6\\
\Delta 4 &= 1 + 2 + 3 + 4 && = 10\\
\Delta 5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 && = 15\\
\Delta 6 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 && = 21
\end{aligned}$$

etc.

2~~bis~~(b). A propos des nombres triangulaires, qu'il appelle "valeurs secrètes", Raymond Abellio, dans sa Bible, document chiffré (1), s'exprime comme suit :

> "Aucun nombre n'est immobile et l'unité, qui seule est statique, n'est pas considérée traditionnellement comme un nombre. Par exemple, le nombre 5 n'est pas seulement le signe figuratif d'une quantité mesurable par cinq ou d'une structure particulière de l'espace dite pentagone, il continue d'être intérieurement animé par tous les nombres qui ont servi à sa formation et qui peuvent en être tirés par réduction quantitative, soit 1, 2, 3 et 4. J'appelle valeur secrète d'un nombre le total de ce qu'il contient d'apparent et de caché c'est-à-dire, pour le nombre 5, le total de 5 (valeur apparente) et de 1 + 2 + 3 + 4 (valeurs cachées), soit 5 + 10 = 15. Certains auteurs appellent ce total l'addition théosophique correspondant au nombre. D'autres, comme les Grecs ou saint Augustin, ont parlé de nombres triangulaires ou trigons parce qu'on peut représenter les valeurs secrètes sous la forme de tas triangulaires. L'équation $V_5 4$ = 10 est celle de la tétraktys ou tétrade sacrée de Pythagore, qui

(1) NRF, collection "Les Essais", XLI, 1950, pp. 60 et suiv.

entendait montrer ainsi que le nombre 4 contient tous les nombres fondamentaux de 1 à 10 et marque le retour à l'unité par la dizaine."

Tout cela est fort exact et suppose, au surplus, chez les pythagoriciens, une numération décimale avec, peut-être, mais rien n'est moins sûr, l'emploi du zéro de position. Il est seulement dommage qu'Abellio ait dépensé des efforts considérables en partant d'un raisonnement [redacted] faux [redacted]

ayant pour objet

des valeurs guématriques des lettres de l'alphabet hébreu. Nous verrons cela aussi [redacted] ultérieurement.

3. Tout nombre entier postule donc un triangle ; et cette postulation s'exprime par le passage de ce nombre entier à un autre tout différent, mais auquel, cependant, il est lié par des affinités que nous montrerons plus tard. Etant donné un nombre K, on trouve son triangle par une formule arithmétique d'une simplicité extrême :

$$\Delta K = \frac{K \times (K + 1)}{2}$$

La division par deux est toujours possible, que K soit pair ou impair ; car si K est pair, le produit de K par (K + 1) est nécessairement pair aussi, et si K est impair, (K + 1) est pair et le produit l'est encore.

Mais si tout nombre entier possède un triangle, l'inverse n'est pas vrai : tout nombre entier n'est pas le triangle d'un autre. Le nombre 17 n'est pas triangulaire, ni le nombre 19 : ces nombres n'ont pas ~~de~~ une racine trinagulaire

positive

qui soit entière. Quand il s'agit de nombres très élevés, on peut se demander s'il est le triangle d'un autre ; et comme il n'existe pas de tables à ce sujet, il faut opérer un calcul.

Soit donc un nombre K assez élevé. Ce nombre est-il un triangle auquel un certain nombre x renvoie ? Se poser cette question, c'est se proposer de résoudre l'expression :

$$K = \frac{y(y + 1)}{2}$$

positive

Si la résolution de cette expression accorde à y une valeur entière, alors [redacted]

cette valeur

est la racine triangulaire de K. Pour le savoir, il faut donner à l'expression reproduite ci-dessus la forme d'une équation du second degré, ce qui est élémentaire :

$$2K = y^2 + y$$

$$y^2 + y - 2K = 0.$$

Toute équation du second degré (ainsi appelée parce que l'inconnue doit y figurer à la puissance 2) a toujours <u>deux</u> racines ; la discussion qui suit la résolution indique, le cas échéant, la racine qui doit être rejetée. Tout le monde ne sait pas résoudre une équation du second degré. Dans le cas qui nous occupe, la solution du problème s'écrit :

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8K}}{2}$$

ce qui se lit : l'inconnue à trouver, sous deux formes, est égale à la moitié de la racine carrée d'un certain nombre

$$1 + 8K$$

qui est prise positivement ou négativement et, dans les deux cas, à laquelle 1 [redacted] a été retranché. Nous ne nous occupons pas des nombres <u>négatifs</u>. La solution unique sera donc :

$$y = \frac{\sqrt{1 + 8K} - 1}{2}$$

On voit que la première condition pour que <u>y</u> soit la racine triangulaire de K est que l'expression :

$$1 + 8K$$

ait une racine carrée entière, qui est à chercher ; la seconde condition, quand cette racine carrée entière existe, est qu'elle soit un nombre impair car il faut encore lui retrancher 1, et le reste doit être divisible par 2.

[redacted]

4. Il existe une multitude de nombres de la forme :

$$1 + 8K$$

qui sont des carrés impairs chaque fois que K est le triangle d'un nombre entier

$$1 + (8 \times \Delta 0) = 1 = 1^2$$
$$1 + (8 \times \Delta 1) = 9 = 3^2$$
$$1 + (8 \times \Delta 2) = 25 = 5^2$$
$$1 + (8 \times \Delta 3) = 49 = 7^2$$
$$1 + (8 \times \Delta 4) = 81 = 9^2$$
$$1 + (8 \times \Delta 5) = 121 = 11^2 \qquad \text{etc.}$$

Pour qu'un nombre K ait une racine triangulaire, il faut donc que 1 + 8K soit un carré impair. De la racine carrée de ce nombre on retranche 1 et l'on divise par 2. Par exemple, 49 est le carré de 7. J'ôte 1 de 7, il reste 6 ; je divise 6 par 2 ce qui donne 3 : le nombre 3 est la racine triangulaire de K = 6, et 6 est le triangle de 3.

5. Nous pouvons aisément calculer la racine triangulaire d'un nombre entier K qui n'est pas un triangle, comme, par exemple, le nombre 17. L'équation à résoudre est :

$$Y^2 + y - (2 \times 17) = 0$$

c'est-à-dire que :

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 \times 17}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{137}}{2} = \frac{-1 \pm 11{,}7046999}{2}$$

Toute équation du second degré à deux racines. Nous ne retiendrons que la racine positive :

$$y = \frac{11{,}7046999 - 1}{2} = \frac{10{,}7046999}{2} = 5{,}35234\ldots$$

On pourra donc, à partir de n'importe quel nombre [redacted] établir une chaine de nombres triangulaires successifs ; ainsi, dans notre exemple :

5,352	a pour triangle :	17 (1) ;
17	a pour triangle :	153 ;
153	a pour triangle :	11781 ;

etc.

ou bien, en partant de [redacted] la racine triangulaire de 8 :

3,531	a pour triangle :	8 (2)
8	a pour triangle :	36
36	a pour triangle :	666
666	a pour triangle :	222111

etc.

6. Il existe des nombres triangulaires de divers degrés (ou ordres) et le nombre de ces degrés est illimité.

Les triangles du premier degré (ou du premier ordre) sont les nombres triangulaires de l'espace à deux dimensions. Voici le début de cette suite :

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, etc.

---

(1) Pour s'en tenir à trois décimales, ce qui nous donne déjà :

$$\frac{5{,}352 \times 6{,}352}{2} = 16{,}9979\ldots$$

(2) Même remarque que plus haut :

$$\frac{3{,}531 \times 4{,}531}{2} = 7{,}99948\ldots$$

7. Les triangles du second degré, indiqué par l'exposant 2 à gauche du signe Δ, sont obtenus par sommations successives des nombres triangulaires du premier degré. On a donc successivement :

$$^{2}\Delta\,1 = \Delta 1 \qquad = 1$$

$$^{2}\Delta\,2 = \Delta 1 + \Delta 2 = 1 + 3 \qquad = 4$$

$$^{2}\Delta\,3 = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 = 1 + 3 + 6 \qquad = 10$$

$$^{2}\Delta\,4 = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 = 10 + 10 \qquad = 20$$

etc.

c'est-à-dire la suite :

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220,

etc.

Cette suite répond à la croissance dans l'espace à trois dimensions du tétraèdre régulier pyramidal sur lequel nous reviendrons plus explicitement dans une autre partie de cet ouvrage. Etant donné un nombre K, son triangle du second degré s'obtient par la résolution de l'expression :

$$\frac{K \times (K + 1) \times (K + 2)}{2 \times 3}$$

8(a). Les triangles du troisième degré, indiqué par l'exposant 3 à gauche du signe Δ, sont obtenus par sommations successives des nombres triangulaires du second degré :

$$^{3}\Delta\,1 = {}^{2}\Delta\,1 \qquad = 1$$

$$^{3}\Delta\,2 = {}^{2}\Delta\,1 + {}^{2}\Delta\,2 = 1 + 4 \qquad = 5$$

etc.

c'est-à-dire la suite :

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, 715

etc.

Cette suite répond à la croissance dans l'espace à quatre dimensions de l'hyper-pyramide régulière, le pentaédroïde, défini à la section 4 de l'article précédent. Etant donné un nombre K, son triangle du troisième degré est donné par la résolution de l'expression :

$$\frac{K \times (K + 1) \times (K + 2) \times (K + 3)}{2 \times 3 \times 4}$$

Cette formule, comme les deux autres données plus haut, ne sont que des cas particuliers de la formule générale :

$$^{n}\Delta\,K = \frac{K \times (K + 1 \times (K + 2 = K + 3) \ldots \times (K + n)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times (n - 1)}$$

8[redacted] (b). Voici, à titre documentaire, les triangles jusqu'au quatrième degré des nombres de 1 à 19 :

TABLEAU N° 1

Entiers	$^1\Delta$	$^2\Delta$	$^3\Delta$	$^4\Delta$
1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126
6	21	56	126	252
7	28	84	210	462
8	36	120	330	792
9	45	165	495	1287
10	55	220	715	2002
11	66	286	1001	3003
12	78	364	1365	4368
13	91	455	1820	6188
14	105	560	2380	8568
15	120	680	3060	11628
16	136	816	3876	15504
17	153	969	4845	20349
18	171	1140	5985	26334
19	190	1330	7315	33649

9. Le triangle second d'un nombre K, si ce nombre est pair, est donné par la somme des carrés des nombres pairs, de 0 à K :

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 \dots + K^2 \; ;$$

et si K est impair par la somme des carrés des nombres ~~des~~ impairs, de 1 à K :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 \dots + K^2$$

Exemples : $^2\Delta 4 = 20 = 0 + 4 + 16$;

$^2\Delta 5 = 35 = 1 + 9 + 25$.

ARTICLE 6 : Les nombres figurés carrés et oblongs

1. Les pythagoriciens connaissaient encore les nombres figurés carrés et oblongs, ou rectangulaires(1). Voyons d'abord les premiers. [redacted]

L'origine de la figure carrée est aussi le point ; mais la figure se développe par adjonctions successives de gnomons qui sont des équerres (fig. 2). Chaque gnomon ajoute, au nombre qui le précède, un nombre impair, ce qui illustre cette propriété arithmétique bien connue que les nombres impairs [redacted] expriment les différences qu'il y a successivement entre un nombre carré, - un nombre multiplié par lui-même, - et son prédécesseur immédiat. Si le nombre 1, produit de lui-même par lui-même, est pris, ainsi qu'il se doit, pour le premier carré, on a :

$$1 - 0 = 1$$
$$4 - 1 = 3$$
$$9 - 4 = 5$$
$$16 - 9 = 7$$

etc.

Les gnomons successifs nous donnent donc la suite des nombres impairs.

FIGURE N° 2

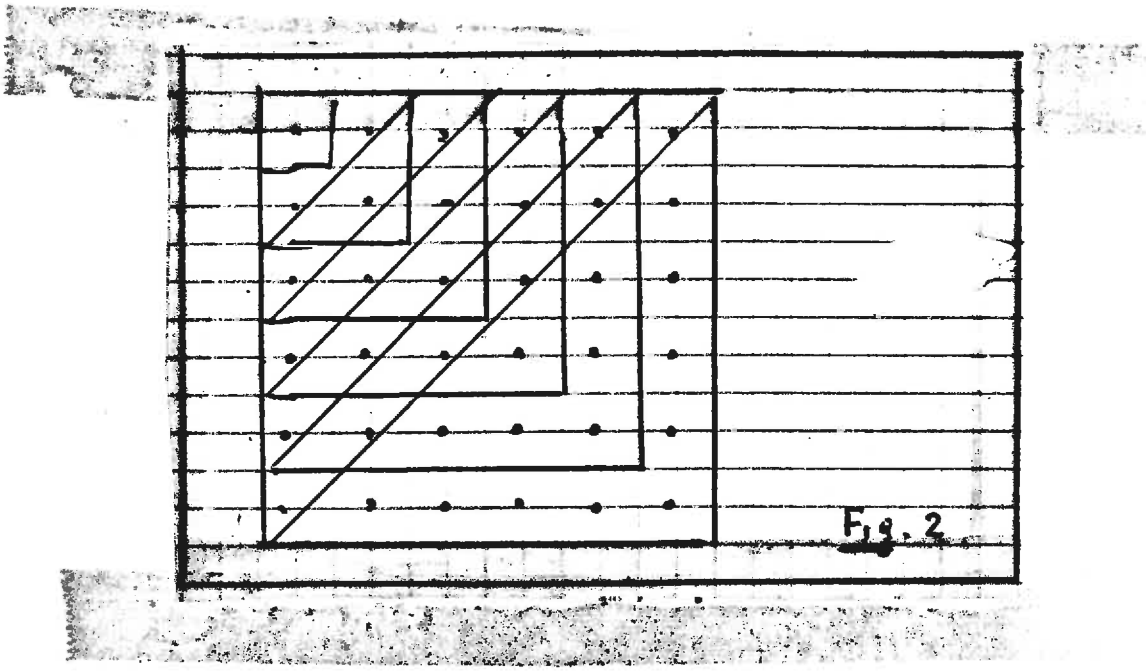


Fig. 2

(1) Il va de soi qu'un rectangle n'est cependant pas un simplex.

2. Ce que la figure n° 2 permet de voir aussi est qu'un nombre carré est toujours la somme de deux nombres triangulaires immédiatement voisins :

$$1 = 0 + 1$$
$$4 = 1 + 3$$
$$9 = 3 + 6$$
$$16 = 6 + 10$$
$$25 = 10 + 15$$

TABLEAU N° 2

1^2	=	$0 + \Delta 1$	=	1	=	0 + 1
2^2	=	$\Delta 1 + \Delta 2$	=	4	=	1 + 3
3^2	=	$\Delta 2 + \Delta 3$	=	9	=	3 + 6
4^2	=	$\Delta 3 + \Delta 4$	=	16	=	6 + 10
5^2	=	$\Delta 4 + \Delta 5$	=	25	=	10 + 15
6^2	=	$\Delta 5 + \Delta 6$	=	36	=	15 + 21

etc.

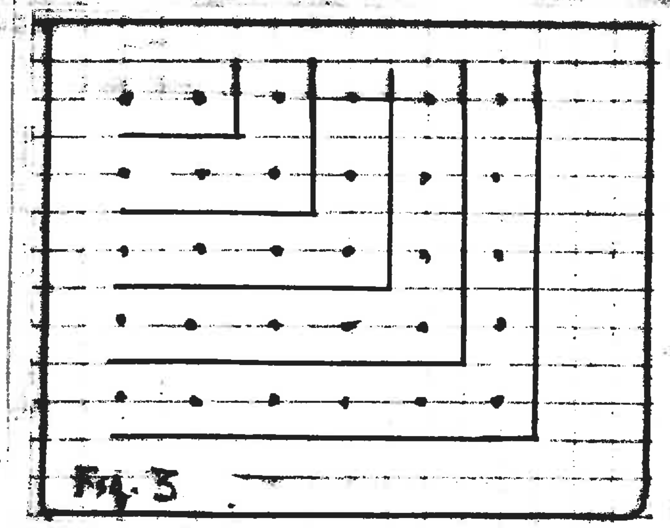
et d'une façon générale :

$$\boxed{K^2 = \Delta(K - 1) + \Delta K}$$

3. Dans les nombres oblongs, l'origine du développement de la figure n'est pas le point, comme dans les nombres carrés de la figure n° 2, mais une certaine multitude de points, la première de ces multitudes étant deux (fig. n° 3) :

~~[illegible]~~

FIGURE N° 3



Il s'ensuit qu'alors qu'il n'y a qu'une figure carrée et qu'une figure triangulaire qui vont en se développant incessamment, nous devons envisager une multitude de figures oblongues, autant qu'il y a d'entiers finis à partir de 2, chacune de ces figures allant en se développant pour son propre compte : d'où la nécessité d'utiliser des signes symboliques moins simples que ceux par lesquels on représente le triangle d'un nombre, nombre qui est un certain gnomon du triangle, et le carré d'un nombre, nombre qui est aussi un certain gnomon du carré.

4. Nous représenterons, d'une manière générale, un nombre oblong par le symbole $\overline{O}$. Ensuite, en indice, un premier chiffre (qui ne sera jamais 1) indiquera la famille, ou l'espèce, à laquelle appartient le nombre oblong considéré : $\overline{O}_2$ pour la figure oblongue ayant pour origine deux points alignés, $\overline{O}_3$ pour la figure oblongue ayant pour origine trois points alignés, $\overline{O}_n$ pour la figure oblongue ayant pour origine n points alignés. Un second chiffre, en indice aussi désignera, pour tel gnomon terminal, le nombre de points que ce gnomon contient. La figure n° 3, par exemple, a pour origine deux points ; le dernier gnomon en comporte 10 ; le nombre oblong que représente cette figure est donc :

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

et l'on écrira :

$$\overline{O}_{2,10} = 30$$

5. La première espèce de figures oblongues se développe à partir de deux points alignés. On voit sans peine que l'on a, en comptant l'alignement initial de deux points et en le représentant lui-même par $\overline{O}_{2,2}$:

TABLEAU N° 2bis

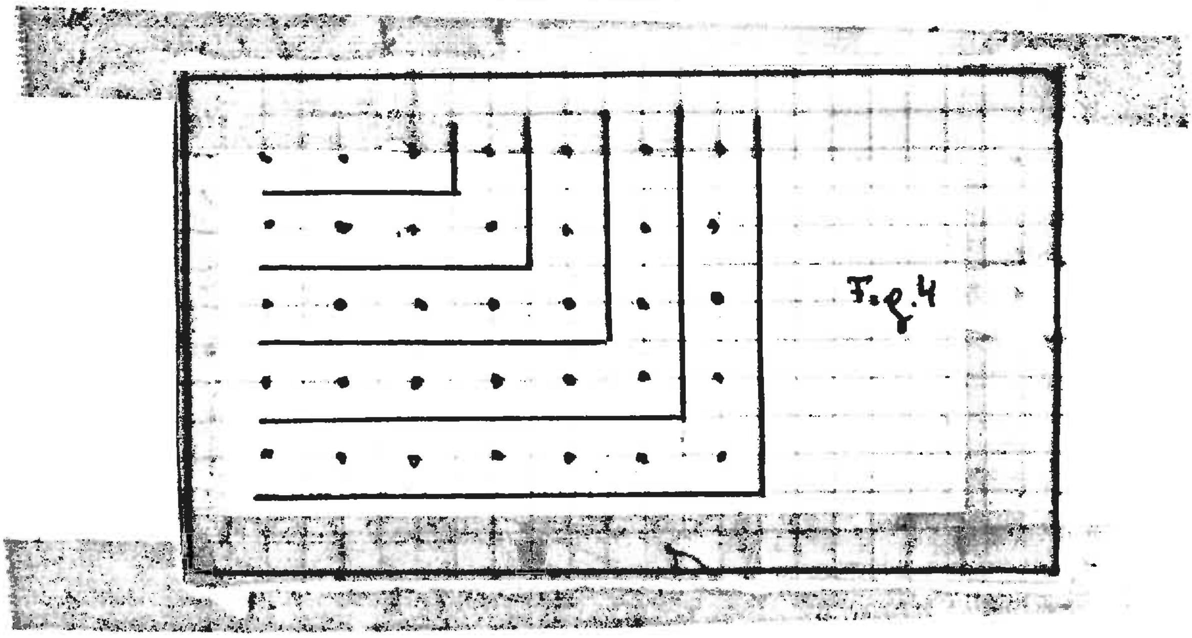
$\overline{O}_{2,2}$	= 2	= 2 x 1	= 2 x $\Delta 1$
$\overline{O}_{2,4}$	= 6	= 2 x 3	= 2 x $\Delta 2$
$\overline{O}_{2,6}$	= 12	= 2 x 6	= 2 x $\Delta 3$
$\overline{O}_{2,8}$	= 20	= 2 x 10	= 2 x $\Delta 4$
$\overline{O}_{2,10}$	= 30	= 2 x 15	= 2 x $\Delta 5$

etc.

Les nombres oblongs de la première espèce nous restituent donc la suite des nombres triangulaires, [redacted].

La seconde espèce de figure oblongue est celle qui se développe à partir d'un alignement de trois points (fig. n° 4) :

FIGURE N° 4



Nous aurons cette fois :

TABLEAU N° 3

$\bar{O}_{3,3}$	= 3	= 1 x 3	
$\bar{O}_{3,5}$	= 8		= 2 x 4
$\bar{O}_{3,7}$	= 15	= 3 x 5	
$\bar{O}_{3,9}$	= 24		= 4 x 6
$\bar{O}_{3,11}$	= 35	= 5 x 7	
$\bar{O}_{3,13}$	= 48		= 6 x 8
		etc.	etc.

c'est-à-dire, d'un côté, le produit de chaque nombre impair (1 étant considéré comme tel) par celui qui le suit immédiatement (de sorte que chaque nombre impair, dans cette suite, se trouve répété); et, de l'autre côté, le produit de chaque nombre pair (0 n'étant pas pris en considération) par celui qui le suit immédiatement (de sorte qu'ici encore, chaque nombre pair, dans cette autre suite, se trouve également répété).

6. Nous laisserons de côté la formule générale des nombres oblongs, qui sont d'ailleurs secondaires. Il y aurait là toute une étude particulière à faire en prenant les suites des nombres oblongs selon leurs espèces, compte tenu du fait que ces suites sont commandées alternativement par la parité et par l'imparité. Dans le premier cas, chaque nombre oblong, sauf le premier qui est pair, est égal au précédent, plus un nombre pair ; dans le second, chaque nombre oblong, sauf le premier, qui est impair, est égal au précédent, plus un nombre impair. Or la somme de deux nombres pairs est toujours un nombre pair ; la somme de deux nombres impairs est également toujours un nombre pair, mais la somme d'un pair et d'un impair est un nombre impair. Les suites se présenteront donc de la manière que voici :

2, 6, 12, 20, 30...
3, 8, 15, 24, 35...
4, 10, 18, 28, 40...
5, 12, 21, 32, 45...
6, 14, 24, 36, 50...

etc.

Lu verticalement, ce tableau présente d'abord la suite des nombres naturels (qui est la progression arithmétique de raison 1 à partir de l'unité), ensuite une progression arithmétique de raison 2, puis une progression arithmétique de raison 3, etc. La chose étant clairement vue, il apparaît qu'en somme les nombres carrés ne sont qu'un cas particulier, le premier, des nombres oblongs :

1, 4, 9, 16, 25....

etc.

7. C'est très consciemment, et même délibérément, que les pythagoriciens n'utilisaient pas de chiffres, lettres ou signes quelconques pour exprimer les nombres entiers finis. Ils appliquaient méthodiquement la quantité discontinue arithmétique à la quantité continue géométrique, ce qui devait les conduire à conclure que les nombres fractionnaires et les nombres irrationnels ne sont pas géométriquement représentables, parce que le système des points ne s'y prête pas. Mais ils connaissaient sans aucun doute ces nombres "irreprésentables" puisque les Egyptiens les connaissaient et que Pythagore avait séjourné plus de vingt ans en Egypte. Nous avons vu plus haut comment les Egyptiens écrivaient les nombres et qu'ils usaient de la numération décimale, sans toutefois le zéro de position. Voilà du moins ce que nous savons de leurs notations mathématiques publiques, toute réserve devant être faite quant à la science réservée qui était enseignée secrètement dans les temples. Ce que les Egyptiens savaient, Pythagore le savait aussi. Il est donc certain que la représentation figurée des nombres, telle que la pratiquaient les pythagoriciens, était volontaire et nullement une façon "primitive" d'écrire les nombres.

8. La légende du scandale qu'aurait soulevé chez les pythagoriciens la constatation que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas représentable par le système des points recèle au moins cette vérité que la science pythagoricienne des nombres figurés était réservée, comme d'ailleurs tous les enseignements de Pythagore ; et de là vient qu'ils sont mal connus et mal interprétés. En s'informant un peu on arrive à savoir que les pythagoriciens avaient poussé loin l'étude des nombres figurés. Leur emblème, le pentalpha, prouve qu'ils connaissaient fort bien les nombres figurés de l'espace à trois dimensions, tels que les nombres tétraédriques et dodécaédriques (1). Ils cultivaient en somme cette branche des mathématiques que nous appelons la "théorie des nombres".

---

(1) Léon Robin, La Pensée grecque, Albin Michel, collection "Evolution de l'humanité", Paris, 1943, p. 74.

9. Nous avons dit que nous ne jetterions, en passant, qu'un regard oblique sur les nombres cubiques et, en général, sur les nombres stéréomorphiques. Voici cependant une remarque digne d'intérêt : le carré d'un nombre triangulaire ΔK est égal à la somme des K premiers cubes :

$$(\Delta 1)^2 = 1^3 \qquad = 1^2 = 1$$
$$(\Delta 2)^2 = 1^3 + 2^3 \qquad = 3^2 = 9$$
$$(\Delta 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \qquad = 6^2 = 36$$
$$(\Delta 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \qquad = 10^2 = 100$$

$$(\Delta K)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + K^3$$

Exemple : $K = 7$; $\Delta K = 28$; $(\Delta K)^2 = 784$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 784 = 28^2$$

ARTICLE 7 : Relations entre les nombres carrés et les nombres triangulaires

1. Pour un nombre entier donné, il existe une multitude de nombres figurés plans ou stéréomorphiques (comme les nombres cubiques, par exemple) ; mais dans le présent ouvrage nous nous en tiendrons, sauf exception, aux seuls nombres figurés plans et, parmi ceux-ci, principalement aux nombres triangulaires et carrés, qui soutiennent entre eux de nombreuses relations. Avant d'en présente quelques-unes au lecteur, nous énoncerons quelques petits théorèmes élémentaires ayant pour objet les nombres triangulaires du premier degré.

2. Sommes :

(a) Triangle d'une somme de deux nombres entiers quelconques.

Soit deux nombres P et Q. Le triangle de la somme P + Q est égal à la somme du triangle de P et du triangle de Q, plus le produit de P par Q :

$$\Delta(P + Q) = \Delta P + \Delta Q + PQ$$

Exemple : P = 5 ; Q = 7. On a :

$$\underbrace{\Delta(5 + 7)}_{78} = \underset{15}{\Delta 5} + \underset{28}{\Delta Q} + \underset{35}{PQ}$$

(b) Somme de deux nombres triangulaires quelconques.

Soit deux nombres triangulaires ΔP et ΔQ. La somme de ces deux nombres est égale au triangle de P + Q moins le produit PQ :

$$\Delta P + \Delta Q = \Delta(P + Q) - PQ$$

Exemple : P = 18 ; Q = 7. On a :

$$\underbrace{\Delta 18 + \Delta 7}_{171 + 28} = \underbrace{\Delta(18 + 7)}_{325} - \underbrace{(18 \times 7)}_{126} = 199$$

Cas particulier : lorsque les triangles dont on fait la somme sont consécutifs, ΔP et $\Delta(P + 1)$, la somme est le carré de $(P + 1)$. Nous avons déjà vu cette relation bien connue.

3. Différences :

(a) Triangle d'une différence de deux nombres entiers quelconques.

Soit deux nombres P et Q, avec P plus grand que Q. Le triangle de la différence P − Q est égal à la somme du triangle de P et du triangle de (Q-1), moins le produit de P par Q :

$$\Delta(P - Q) = \Delta P + \Delta(Q-1) - PQ$$

Exemple : P = 10 ; Q = 6. On a :

$$\underbrace{(10 - 6)}_{\Delta 4\, =\, 10} = \underbrace{\Delta 10}_{55} + \underbrace{\Delta 5}_{15} - \underbrace{(6 \times 10)}_{60}$$

(b) Différence de deux nombres triangulaires quelconques.

Soit deux nombres P et Q, avec P plus grand que Q, et les triangles Δ P et Δ Q de ces nombres. La différence de ces deux triangles est égale à la somme du triangle (P – Q) et du produit de (P – Q) par Q.

$$\Delta P - \Delta Q = \Delta(P - Q) + Q \times (P - Q).$$

Exemple : soit deux nombres triangulaires $\Delta 43$ et $\Delta 19$. On a :

$$\underbrace{\Delta 43 - \Delta 19}_{946\, -\, 190} = \underbrace{\Delta(43 - 19)}_{\Delta 24\, =\, 300} + \underbrace{19 \times (43 - 19)}_{456}$$

$$= 756$$

4. Le triangle d'un produit de deux nombres entiers quelconques P et Q est égal au produit des carrés de ces nombres, plus le produit de ces deux nombres, le tout divisé par deux.

$$\Delta (P \times Q) = \frac{P^2Q^2 + PQ}{2}$$

Exemple : P = 17 ; Q = 11. Leur produit est 187 dont le triangle est 17578. On voit que :

$$289 \times 121 + 187 = 35\,156$$

et 35156 divisé par 2 donne 17578.

De là se tire cette proposition que le produit de deux carrés est égal au double triangle du produit des racines de ces carrés, moins ce produit.

$$2\,\Delta(P \times Q) - PQ = P^2Q^2$$

Exemple :

$$\underbrace{2 \times \Delta(8 \times 11)}_{7832} - (8 \times 11) = \underbrace{64 \times 121}_{7744}$$

5-7. Relations entre le triangle et le carré d'un nombre K

(a) Le carré du triangle d'un nombre K est égal au produit du carré de ce nombre par (2K + 1), le tout divisé par 4 :

$$(\Delta K)^2 = \left(\frac{K\,(K + 1)}{2}\right)^2 = \frac{K^2 \times (K + 1)^2}{4}$$

Exemple : K = 17 ; $\Delta 17$ = 153 ; le carré de 153 est 23409 :

$$(\Delta 17)^2 = \frac{289 \times 324}{4} = \frac{93636}{4} = 23409$$

(b) De la formule précédente, on tire que le carré d'un nombre K est égal à quatre fois le carré de son triangle, le tout divisé par le carré de (K + 1) :

$$K^2 = 4 \times \frac{(\Delta K)^2}{(K+1)^2}$$

Exemple : K = 19 ; le carré de 19 est 361 ; le triangle de 19 est 190 ; le carré de 20 est 400.

$$(19)^2 = 4 \times \frac{36100}{400} = 361$$

(c) Le triangle d'un nombre carré K^2 est évidemment égal, selon la formule qui donne le triangle d'un nombre, au produit de K^2 par $(K^2 + 1)$ le tout divisé par 2 :

$$\Delta (K^2) = \frac{K^2 (K^2 + 1)}{2}$$

Exemple : K = 23 ; le carré de 23 est 529, le triangle de 529 est 140185 :

$$\Delta 529 = \frac{529 \times 530}{2} = 140185$$

(d) Le produit du triangle d'un nombre par le carré de ce nombre est :

$$\Delta K \times K^2 = \frac{K^2 (K^2 + K)}{2}$$

Exemple : K = 17 ; $K^2 = 289$; $\Delta K = 153$; $K^2 + K = 306$:

$$153 \times 289 = \frac{289 \times 306}{2} = 44217$$

(e) La somme du triangle d'un nombre K et du carré de ce nombre est :

$$\Delta K + K^2 = \frac{K(K+1)}{2} + K^2 = \frac{K^2 + K + 2K^2}{2} = \frac{3K^2 + K}{2}$$

Exemple ; K = 11 ; $\Delta K = 66$; $K^2 = 121$

$$66 + 121 = \frac{(3 \times 121) + 11}{2} = \frac{374}{2} = 187$$

(f) La différence du carré d'un nombre K et du triangle de ce nombre est :

$$K^2 - \Delta K = K^2 - \frac{K(K+1)}{2} = \frac{2K^2 - K^2 - K}{2} = \frac{K^2 - K}{2} = \frac{K(K-1)}{2}$$

Exemple : K = 11 :

$$121 - 66 = \frac{121 - 11}{2} = 55$$

Le carré d'un nombre est toujours plus grand que le triangle de ce nombre ; et cette différence est toujours un multiple du nombre en question : elle est elle-même un triangle ; cela se déduit de la formule générale :

$$K^2 - \Delta K = \Delta (K - 1)$$

Ainsi plus haut : $\frac{121 - 66}{2} = 55 = \Delta 10.$

(g) Le triangle d'une somme (a + b), dont le carré est $(a^2 + 2ab + b^2)$ est :

$$\Delta(a+b) = \frac{(a+b) \times (a+b+1)}{2}$$
$$= \frac{a^2 + ab + a + ab + b^2 + b}{2}$$
$$= \frac{(a+b)^2 + (a+b)}{2}$$

Exemple : $\Delta(17 + 19)$:

$$\Delta \underbrace{(17+19)}_{36} = \frac{(17+19)^2 + (17+19)}{2}$$
$$= \frac{1296 + 36}{2} = \frac{1332}{2} = 666$$

(h) Le triangle d'une différence (a − b), dont le carré est $(a^2 - 2\,ab + b^2)$ est :

$$\Delta(a-b) = \frac{(a-b) \times (a-b+1)}{2}$$
$$= \frac{a^2 - ab + a - ab + b^2 - b}{2}$$
$$= \frac{(a-b)^2 + (a-b)}{2}$$

Exemple : $\Delta(306 - 285)$:

$$\Delta \underbrace{(306 - 285)}_{21} = (306-285)^2 + (306-285)$$
$$= \frac{441 + 21}{2} = 231$$

(i) Le triangle d'un produit (a x b), dont le carré est $(a^2 \times b^2)$ est :

$$\Delta(a \times b) = \frac{(a \times b) \times [(a \times b) + 1]}{2}$$
$$= \frac{(a \times b)^2 - (a \times b)}{2}$$

Exemple : $\Delta(13 \times 9)$:

$$\Delta \underbrace{(13 \times 9)}_{117} = \frac{117^2 - 117}{2} = \frac{13689 - 117}{2} = \frac{13572}{2} = 6786$$

La formule est analogue quand on cherche le triangle du quotient de a divisé par b.

8. L'étude des nombres figurés plans comporte aussi celle de l'association d'un nombre triangulaire à un nombre carré ou à un nombre oblong (fig. n° 5). L'association la plus simple d'un nombre triangulaire à un nombre carré, lorsque ces nombres sont plus grands que un, est évidemment :

Lmp

$$\Delta 2 + 2^2 = 7.$$

L'analyse des associations de ce type repose sur les deux suites :

- <u>triangles</u> : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55...
- <u>carrés</u> : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Ces nombres correspondants : 1 et 1, 3 et 4, 6 et 9, etc., mériteraient d'être examinés de très près, soit en faisant leur somme :

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126...

soit en opérant leurs différences, qui restituent la suite des nombres triangulaires :

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36...

soit encore en effectuant leurs produits :

1, 12, 54, 160, 375, 756, 1372...

Nous n'investiguerons pas plus loin. Il aura suffi [redacted] de signaler l'intérêt fort probable de la question de l'association des nombres triangulaires aux nombres carrés.

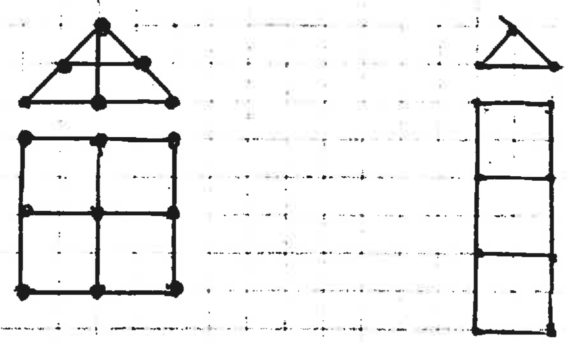


Fig S

ARTICLE 8 : Le nombre 2, première de toutes les multitudes

1. Les nombres triangulaires de degrés successifs, dont nous avons parlé à l'article 5, section 6, sont donnés par le triangle que Pascal conçut pour fournir d'une manière simple les coefficients du développement du binôme de Newton :

$$(a + b)^n$$

J'en présenterai tout d'abord la figure :

TABLEAU N° 4

	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H	(T)
(a)	1								1
(b)	1	1							2
(c)	1	2	1						4
(d)	1	3	3	1					8
(e)	1	4	6	4	1				16
(f)	1	5	10	10	5	1			32
(g)	1	6	15	20	15	6	1		64
(h)	1	7	21	35	35	21	7	1	128
							etc.		etc.

On voit comment est construite cette merveilleuse figure que l'on peut étendre indéfiniment. La première colonne verticale (A) répète l'unité indéfiniment. La seconde colonne (B) présente la suite naturelle des entiers finis ; la colonne (C), les triangles du premier degré de ces nombres ; les colonnes (D) (E), (F), (G), etc., les triangles du second, troisième, quatrième, cinquième, etc. degrés de ces mêmes nombres. La même lecture peut se faire obliquement : la diagonale qui part de (a) répète l'unité indéfiniment ; la diagonale qui part de (b) présente la suite naturelle des entiers finis ; celles qui partent de (c), de (d), de (e), de (f), de (g), etc., les nombres triangulaires du premier, second, troisième, quatrième, cinquième, etc. degrés.

2. Lu horizontalement, le triangle de Pascal donne les spécifications des simplex correspondant aux colonnes verticales (on ne tient pas compte de la première, qui répète 1). En effet, le triangle équilatéral, simplex de l'espace à deux dimensions, est défini par les nombres 3, 3, 1 ; trois sommets, trois côtés une surface ; le tétraèdre régulier, simplex de l'espace à trois dimensions, est défini par les nombres 4, 6, 4, 1 : 4 sommets, 6 côtés, 4 faces, 1 volume ; l'hyper-pyramide régulière, simplex de l'espace à quatre dimensions, est défini par les nombres 5, 10, 10, 5, 1 : 5 sommets, 10 côtés, 10 surfaces triangulaires équilatérales, 5 tétraèdres réguliers (cellules-frontières), un hypervolume. Et ainsi de suite, encore qu'au-delà de l'espace à quatre dimensions les figures géométriques ne se laissent plus représenter. Il n'est déjà pas aisé de "visionner" mentalement une hyper-pyramide.

Aussi a-t-on pu dire que le triangle de Pascal est le diagramme le plus riche en propriétés mathématiques (arithmétiques, géométriques et algébriques). Il intervient dans l'analyse combinatoire et dans le calcul des probabilités ; il est étroitement lié à la <u>section dorée</u> dont nous parlerons plus tard. D'autres nombreuses observations peuvent être faites ; en voici deux.

3. Les chiffres qui se succèdent horizontalement forment des nombres qui sont les puissances successives de 11 :

$$1 = 11^0$$
$$11 = 11^1$$
$$121 = 11^2$$
$$1331 = 11^3$$
$$14641 = 11^4$$

Lorsque l'on arrive à l'horizontale (f), il faut lire <u>décimalement</u> : 1 unité, 5 dizaines, 10 centaines, soit mille, à reporter sur le nombre qui exprime les milliers et qui, étant lui-même dix, signifie dix mille, ce qui oblige à [redacted] sur le chiffre 5. Autrement dit, en lecture <u>décimale</u>, le nombre

opérer le report

$$1\ 5\ (10)\ (10)\ 5\ 1$$

est en réalité 1 6 10 5 1, soit 11^5. On aura de la même façon :

$$1\ 6\ (15)\ (20)\ (15)\ 6\ 1 = 1771561 = 11^6$$
$$1\ 7\ (21)\ (35)\ (35)\ (21)\ 7\ 1 = 19487171 = 11^7$$

Nous verrons en temps opportun la signification profonde du nombre 11.

4. Seconde observation : si l'on fait la somme des nombres horizontaux on obtient les totaux indiqués dans la colonne (T) de la figure :

1	= 1
1 + 1	= 2
1 + 2 + 1	= 4
1 + 3 + 3 + 1	= 8
1 + 4 + 6 + 4 + 1	= 16
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	= 32
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1	= 64
etc.	etc

Je donne aux nombres formant la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc., le nom de nombres de la multiplicité pure, et voici pourquoi.

5. Le nombre 1 est le principe de toutes les multitudes qu'il produit par la répétition indéfinie de lui-même. La première multitude est 2 qu'on obtient par une première répétition de 1. Si l'on applique le principe de la répétition à 2, puis au nombre ainsi obtenu, qui est 4, puis à 8, ce qui nous conduit à 16, et ainsi de suite indéfiniment, on obtient les puissances successive de la première de toutes les multitudes :

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

etc.

Ainsi, [redacted] la suite des nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc., est quantitativement la plus simple des suites de multitudes, le principe de la répétition [redacted] étant appliqué [redacted] indéfiniment.

1 + 1 = 2

2 + 2 = 4

4 + 4 = 8

8 + 8 = 16

16 + 16 = 32

etc.

Tels sont les nombres de la multiplicité pure, [redacted] multitudes obtenues avec le minimum de moyens ; car la suite naturelle des nombres étant donnée, n'importe quel nombre de la multiplicité pure ramène à un par un nombre convenable de divisions par deux. Et, ce qu'il faut bien voir, [redacted] est que tout commence par 1 + 1, et que le principe de la répétition ne consiste pas à ajouter indéfiniment 2, ce qui donnerait seulement la suite des nombres pairs, mais à répéter l'addition du même au même, sur le modèle de 1 + 1.

6. Le rapport du carré d'un nombre entier K quelconque à son triangle tend vers <u>deux</u>, lorsque K croit indéfiniment. En effet :

$$\frac{K^2}{\Delta K} = \frac{K^2}{\frac{K(K+1)}{2}} = 2 \times \frac{K}{K+1}$$

Le tableau n° 5 montre bien que le nombre <u>deux</u> est la limite vers laquelle tend le rapport de Δ K à K^2 lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre K :

TABLEAU N° 5

K	K^2	2K	K + 1	ΔK	$\frac{K^2}{\Delta K} = \frac{2K}{K+1}$
1	1	2	2	1	1
2	4	4	3	3	1,333...
3	9	6	4	6	1,5
4	16	8	5	10	1,6
5	25	10	6	15	1,666...
6	36	12	7	21	1,71428
7	49	14	8	28	1,75
8	64	16	9	36	1,777...
9	81	18	10	45	1,8
10	100	20	11	55	1,8181...
11	121	22	12	66	1,833..
12	144	24	13	78	1,846...
100	10 000	200	101	5050	1,9801...
					etc.

Donnons à K des valeurs beaucoup plus élevées : si K = 17, il vient déjà :

$$\frac{2K}{K+1} = \frac{K^2}{\Delta K} = 2 \times \frac{289}{290} = \frac{578}{290} = 1{,}993$$

Si K = 9999, on obtient :

$$\frac{2K}{K+1} = \frac{K^2}{\Delta K} = 2 = \frac{9999}{10000} = \frac{9999}{500} = 1{,}999$$

Il en est ainsi parce que les nombres K et K + 1 du rapport

$$\frac{K}{K+1}$$

s'identifient en quelque sorte, lorsque l'on passe à la limite, dans la multitude "transfinie" des entiers finis, [redacted] l'on envisage cette mtultitude non point

ceci étant entendu que

comme croissant indéfiniment, mais comme un tout actuel, - le tout appelé <u>aleph-zéro</u>, - qui, par définition, ne change pas quand on lui ajoute ou quand on lui retranche l'unité, parce que ces opérations sur <u>aleph-zéro</u> n'ont pas de sens.

7. Le tableau n° 5A présente les rapports de ΔK à K^2 pour K envisagé de 0 à 9, puis de 10 à 99, puis encore de 100 à 999 et enfin de 1000 à 9999. On voit que, pour K = 9999, le nombre 2 est atteint à deux dix-millièmes près.

TABLEAU N° 5A

K	K^2	ΔK	$\frac{K^2}{\Delta K}$	
1	1	1	1	
2	4	3	1,3333...	
3	9	6	1,5	
4	16	10	1,6	
5	25	15	1,6666...	
6	36	21	1,7142857...	
7	49	28	1,75	
8	64	36	1,7777...	
9	81	45	1,8	2 x 0,9
10	100	55	1,818181...	18 = 2 x 9
....	....	....	....	
36	1296	666	1,945945...	
....	....	....	....	
99	9801	4950	1,98	2 x 0,99
100	10000	5050	1,9801...	198 = 2 x 99
....	....	....	....	
999	998001	499500	1,998	2 x 0,999
1000	1000000	500500	1,998001...	1998 = 2 x 999
....	....	....	....	
9999	9998001	49995000	1,9998	2 x 0,9999

8. Le nombre deux, quel que soit K, est donné "en acte", et non plus "en puissance", par l'expression :

$$\Delta(K^2) = \frac{K^2\ (K^2 + 1)}{2}$$

d'où se tire immédiatement

$$2 = \frac{K^2\ (K^2 + 1)}{\Delta(K^2)}$$

en même temps que

$$K^2 = 2 \times \frac{\Delta(K^2)}{(K^2 + 1)}$$

formule qui peut donner un nombre décimal multiplié par 2. Ainsi pour K = 11, on a : $K^2 = 2 \times 60{,}5$. Le nombre 2 est encore donné par l'expression plus compliquée mais toujours entière :

$$2 = \frac{\Delta(K^2) \times (K + 1)^2}{(\Delta\ K)^2 \times (K^2 + 1)}$$

Exemple : $K = 9$; $K^2 = 81$; $\Delta\ (K^2) = 3321$; $(K + 1)^2 = 100$; $(\Delta\ K)^2 = 2025$; $(K^2 + 1) = 82$;

$$\frac{3321 \times 100}{2025 \times 82} = \frac{332100}{166050} = 2.$$

Le nombre deux est la première de toutes les multitudes. Nous voyons ici que :

"Le produit du triangle du carré d'un nombre entier quelconque par le carré de ce nombre plus un donne toujours 2 quand on divise ce produit par le produit du carré du triangle de ce nombre par ce nombre au carré plus un".

Ainsi, la limite vers laquelle tend le rapport du carré d'un nombre au triangle de ce nombre, quand ce nombre croît indéfiniment, est le rapport entre, d'une part, le produit du triangle du carré d'un nombre entier fini quelconque par ce nombre augmenté de 1 et, d'autre part, le produit du carré du triangle de ce nombre quelconque par le carré de ce nombre augmenté de 1. Et ce rapport est 2.

$$2 = \frac{K^2(K^2+1)}{\Delta(K^2)} = \frac{\Delta(K^2) \times (K+1)^2}{(\Delta K)^2 \times (K^2+1)}$$

Les considérations qui précèdent ne sont pas sans relation avec deux propriétés géométriques élémentaires. La première est que lorsqu'on divise un carré par une diagonale, de manière à déterminer deux triangles rectangles isocèles égaux, le rapport de l'aire du carré [redacted] à celle de

est celui de

chaque triangle [redacted] 2 [redacted] à 1 parce que l'aire du carré est le double de l'aire de chacun des triangles. [redacted] La seconde propriété est que si le côté du carré est estimé valoir 1, la mesure de la diagonale, en vertu du théorème de Pythagore sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle, sera donnée par le nombre $\sqrt{2}$ = 1,414 = 7 x 0,202. [redacted] Si, à partir de cette diagonale, on construit un nouveau carré , l'aire de celui-ci sera $\sqrt{2}$ au carré, c'est-à-dire <u>deux</u>. Ce nouveau carré AEFC a lui-même pour diagonale AF, dont le nombre est 2. Un nouveau carré pourra être construit, de côté 2, ayant pour aire 4 et pour diagonale 2 x $\sqrt{2}$, soit 2,828 = 7 x 0,4040 nombre où se trouvent associés 7 et 2^2 (1).

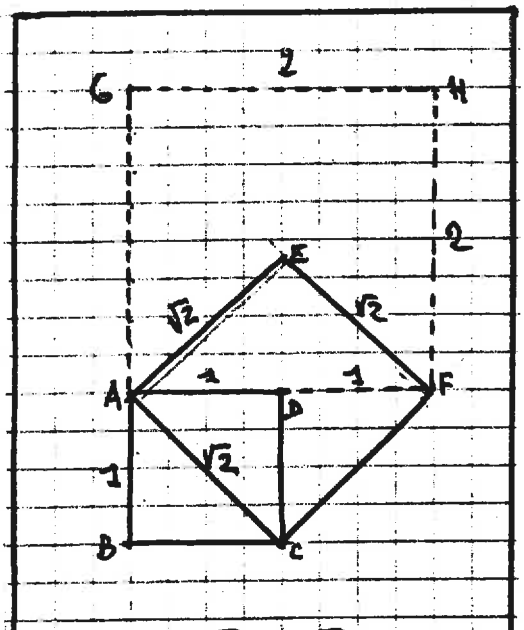


Fig. 5

L'intérêt de tout ceci réside dans le fait que le nombre <u>deux</u> est la <u>première multitude entière finie</u>. <u>Sa racine</u> est aussi un des quatre nombres irrationnels fondamentaux de l'Eurythmologie, les trois autres étant le nombre π , rapport (de la circonférence) du cercle à son diamètre,

(1) J'ai pris $\sqrt{2}$ avec trois décimales seulement, mais on pourrait aller évidemment plus loin. Le nombre 4040 = 4 x 1010 fait apparaître, associé à 4 = 2^2, le nombre 101 multiplié par 10, que nous retrouverons souvent. Si l'on prend $\sqrt{2}$ avec 7 décimales, et qu'on le multiplie par 10^7, on obtient :

$$14142135 = 3 \times 4714045 = 3 \times 5 \times 942809 = \underbrace{3 \times 5 \times 7^2}_{735} \times 19241$$

[redacted]

le nombre logarithmique e et le nombre $\emptyset$ de la section dorée.

10. Le rapport du triangle d'un nombre K entier a son carré tend vers la moitié de 1, lorsque K croît indéfiniment :

$$\frac{\Delta K}{K^2} = \frac{K(K+1)}{2K^2} = \frac{K+1}{2K}$$

Pour K = 1, ce rapport est 1 ; pour K= 2, il est :

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \;;$$

pour K = 3 :

$$\frac{4}{6} = 0{,}6666...$$

pour K = 17 :

$$\frac{18}{34} = 0{,}5294...$$

enfin, pour K = 9999 :

$$\frac{10000}{19998} = 0{,}50005...$$

Il en est évidemment ainsi : $\frac{1}{2}$ est l'inverse de 2 comme $\frac{\Delta K}{K^2}$ est l'inverse de $\frac{K^2}{\Delta K}$.

<u>ARTICLE 9</u> : <u>Les nombres de la multiplicité pure et les nombres premiers</u>

1. Les nombres entiers sont, analogiquement et symboliquement, la "matière" des êtres créés, comme les pythagoriciens, dont la science est sans aucun doute d'origine égyptienne, l'enseignaient. Cette "matière", qu'il ne faut évidemment pas confondre avec la <u>materia prima</u> métaphysique, rend raison des structures des <u>formes</u> spécifiques intelligibles. Il faut lire, à ce sujet, les précieuses études de Matila C. Ghyka, principalement peut-être <u>Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts</u>, <u>Le Nombre d'or</u> et <u>Philosophie et mystique des nombres</u> (1).

2. L'ensemble des nombres entiers finis peut être envisagé principalement de deux façons, selon que l'on considère ou non l'unité comme un nombre. A strictement parler, elle n'en est pas un, n'étant pas une multitude, et zéro l'est encore moins, qui est absence de toute quantité. En donnant au terme "nombre" l'extension qu'il a en algèbre, et parfois aussi en arithmétique, <u>un</u> et <u>zéro</u> sont des nombres.

(a) Dans le premier cas où zéro et un ne sont pas des nombres, le nombre <u>deux</u> est le chef de file de tous les nombres pairs, et, le nombre <u>trois</u>, le chef de file de tous les nombres impairs. Alors l'unité arithmétique transcende ces deux classes de nombres qu'elle produit par la répétition indéfinie d'elle-même, - répétition qui compense, en quelque sorte, son insuffisance ontologique. On a donc :

$$(1) \left\{ \begin{array}{llll} (\underline{2}) & 4 & 6 & 8 \; \ldots\ldots \\ (\underline{3}) & 5 & 7 & 9 \; \ldots\ldots \end{array} \right.$$

(b) Dans le second cas, <u>zéro</u> et <u>un</u> sont considérés comme des nombres et ils précèdent les nombres <u>deux</u> et <u>trois</u>. Mais alors doit intervenir la notion de <u>flux numéraux</u> : de flux "expansif" et de flux "contractif" ainsi que nous allons l'expliquer.

---

(1) Ces trois livres ont paru à la NRF en 1927, 1931 et 1952.

3. Le flux "expansif" commence par un. Il exprime un éloignement indéfini de l'unité, et cet éloignement s'opère par les impairs qui sont, dit la tradition extrême-orientale, les nombres yang. Le flux "contractif" exprime un retour à partir de l'horizon inaccessible de la multitude totale des multitudes, et ce flux aboutit à zéro sans passer par l'unité. C'est le flux numéral des nombres pairs, qui sont yin (1). Le nombre trois sourd donc de l'unité ou monade principielle et il manifeste la multitude polyadique selon les différents degrés de celle-ci. Le second flux représente une résorption graduelle de la multiplicité polyadique, jusqu'à son évanouissement complet, qui est zéro, le nombre un n'étant pas compté. On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{12em}} \\ (1),\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (0),\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xleftarrow{\hspace{12em}} \end{array}\right\}\ \text{Totalité polyadique}$$

4. Ce double flux fera plus tard l'objet de notre attention. Nous l'examinerons d'abord en lui-même, l'étudiant particulièrement aux trois premiers degrés de l'expansion et de la contraction polyadiques (2) ; nous l'envisagerons ensuite en tant qu'il se laisse quadraturer, les nombres de ces flux demeurant dans l'ordre naturel de la suite des entiers finis, mais la direction de cet ordre étant conforme tantôt à l'expansion et tantôt à la contraction. Enfin, nous arriverons aux carrés magiques pour lesquels le professeur Hogben nourrit le plus profond mépris. Ces carrés magiques nous proposeront un ordre de distribution des nombres plus complexe et plus riche que l'ordre de leur succession naturelle. Chemin faisant, d'autres questions seront abordées, notamment celle des opérations eurythmologiques. Le lecteur jugera en connaissance de cause la qualité de l'antique arithmosophie, science perdue [redacted] dont cette Introduction tente de [redacted] dégager le principe.

---

(1) Nous reparlerons [redacted] en détail du yin et du yang. — Il est ici question de l'horizon inaccessible de la multitude de toutes les multitudes parce que, lorsque l'on considère la répétition indéfinie de l'unité, le grand total n'existe qu'en puissance. On peut au contraire l'appréhender en acte. C'est alors le nombre de tous les nombres, le "transfini" aleph-zéro qui échappe aux opérations arithmétiques ordinaires (Par exemple, on ne peut ni ajouter ni retrancher un de cette multitude totale).

(2) C'est-à-dire : 1) de 0 à 9 et de 9 à 0 ; ou bien de 1 à 10 et de 10 à 1 ; 2) de 0 à 99 et de 99 à 0, ou bien de 1 à 100 et de 100 à 1 ; 3) de 0 à 999 et de 999 à 0, ou bien de 1 à 1000 et de 1000 à 1. Et ainsi de suite.

5. Comment classer les nombres entiers finis ? Il semble que nous ayons déjà répondu à cette question : les nombres entiers finis se divisent en deux classes, celle des nombres impairs et celle des nombres pairs. Cela est vrai. La réflexion, cependant, doit remonter plus haut. Deux sortes de nombres s'imposent à nous en raison du caractère opposé [redacted] de leur nature : les nombres de la multiplicit pure et les nombres premiers.

6. Nous avons brièvement exposé, à l'article précédent, le principe de la répétion qui est celui de l'addition du même au même sur le modèle unique de la répétition fondamentale de l'unité 1 + 1 :

$$1 + 1 = 2 = 2^1$$
$$2 + 2 = 4 = 2^2$$
$$4 + 4 = 8 = 2^3$$
$$8 + 8 = 16 = 2^4$$

etc.

De même qu'on ajoute 1 à 1, ce qui est le commencement de la suite des multitudes, de même on ajoute 2 à 2, puis 4 à 4 et ainsi de suite indéfiniment. Il ne s'agit donc pas de la simple répétition de 2, ce qui donnerait seulement la suite des nombres pairs, mais de la répétition de la répétition, ce qui donne les puissances successives de deux. Il s'agit bien d'une suite [redacted] qui s'étend indéfiniment, mais d'une suite [redacted] dont le principe est deux parce que [redacted] un nombre de la multiplicité pure, quel qu'il soit, et divisé par deux un nombre convenable de fois, ramène à un, par le seul chemin du nombre deux. Ainsi, et de ce point de vue, la suite des nombres de la multiplicité pure, qui ne met en oeuvre que le nombre deux, est celle dont la conception et le développement mettent en oeuvre le minimum de moyens logiques.

7. Naturellement opposés aux nombres de la multiplicité pure sont les nombres premiers, les plus singuliers de tous les nombres. On dit d'eux qu'ils ne sont divisibles que par l'unité et que par eux-mêmes. Mais, à vrai dire, diviser un nombre quelconque par un, et plus particulièrement un nombre premier, ce n'est pas exécuter une opération qui modifie ce nombre ; c'est le laisser tel quel ; et diviser un nombre par lui-même, c'est le détruire en revenant [redacted] à l'unité qui l'a produit par répétition indéfinie d'elle-même [redacted]. Aussi est-on en droit de dire que les nombres premiers :

(1), 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.

sont des nombres indivisibles et, en tant que tels, des répliques de l'unité. L'unité arithmétique, en effet, et aussi longtemps que l'on n'opère pas l'application de la quantité discontinue à la quantité continue, est indivisible, et l'arithmétique, en tant que pure théorie des nombres, ignore les nombres fractionnaires et davantage encore [redacted] les nombres irrationnels, algébriques ou transcendants (1).

(1) Un nombre algébrique "à décimales" est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers. Les nombres transcendants, tous "à décimales", ne le sont point. Ainsi le nombre pi, 3,141592...

Aucun nombre premier, et c'est ce qui le différencie de tous les autres, n'est le produit de deux ou plusieurs nombres, excepté le produit de lui-même par un. Le premier nombre non premier qui soit un tel produit, est quatre ; encore faut-il voir que quatre est un nombre de la multiplicité pure, comme deux lui-même, lequel est le seul nombre (autre que un) qui soit à la fois nombre premier et nombre de la multiplicité pure. Ainsi, le premier nombre qui ne soit ni premier, ni nombre de la multiplicité pure, est six, deux fois trois.

8(a). La suite des nombres premiers est illimitée ; on démontre, depuis Euclide, qu'un nombre quel qu'il soit étant donné, il existe après lui un nombre premier. Mais on ne connaît aucune loi de formation des nombres premiers ; aussi, leur apparition dans la suite des entiers finis est-elle imprévisible, mis à part le fait qu'il ne peut évidemment pas exister deux nombres consécutifs premiers (sauf 1 et 2, et 2 et 3) puisque, de deux nombres consécutifs, l'un est nécessairement pair (1). C'est ce qui leur confère un caractère créateur et rend compte du fait que le flux numéral des nombres impairs est expansif ; car, sauf le nombre deux, tous les nombres premiers sont impairs. Nous dirons donc qu'à partir du nombre trois, les nombres premiers constituent le <u>moteur</u> de l'expansion du flux <u>catabatique</u> (qui éloigne) et inversément que, jusqu'au nombre deux inclusivement, les nombres de la multiplicité pure constituent le <u>moteur</u> de la contraction du flux numéral <u>anabatique</u> (qui fait retour).

8(b). Il existe de nombreux théorèmes (propositions démontrées) relatifs aux nombres premiers. En voici un : "Si A est divisible par P, P étant premier et inférieur à A, alors il existe un diviseur de A qui est premier, et inférieur à $\sqrt{A}$." En voici un autre : "Les nombres premiers deviennent de plus en plus rares dans la suite naturelle des nombres." On en compte 168, non compris le nombre 1, dans les mille premiers nombres, 135 dans le millier suivant (entre 1000 et 2000), ensuite.

(1) Fermat a pensé que tout nombre de la forme $2^{2^n} + 1$ était premier. Or le cinquième nombre de cette série, 4294967297 est divisible par 641.

77 nombres premiers existent entre 19900 et 200000
71 " " " " 10^7 et $10^7 + 1000$
54 " " " " 10^8 et $10^8 + 1000$
49 " " " " 10^9 et $10^9 + 1000$
37 " " " " 10^{12} et $10^{12} + 1000$ (1).

Cependant, si loin qu'on aille, il existe toujours un nombre premier supérieur à un nombre donné. Ainsi un ou plusieurs nombres premiers existent entre 10^n et $10^n + 1000$ si grand que soit $\underline{n}$.

---

(1) M. Kraitchik, Introduction à la théorie des nombres, Paris, Gauthier-Villars, 1952, p. 3.

9. Puisque 1 est la racine des nombres de la multiplicité pure et des nombres premiers, il peut paraître intéressant, au premier abord, d'étudier eurythmologiquement les rapports des nombres premiers aux nombres de la multiplicité pure de même rang :

$$(1)\quad \begin{cases} 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128 \ldots\ldots \quad 32768 \ldots\ldots\ 2^n \\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17 \ldots\ldots \quad 47 \ldots\ldots\ ? \end{cases}$$

l'on verrait évidemment que, puisque les nombres de la multiplicité pure croissent beaucoup plus vite que les nombres premiers, la suite des rapports d'un nombre premier au nombre de la multiplicité pure qui lui correspond ne cesse de croître indéfiniment à partir de un. Mais il faut observer que 2 est un nombre premier et qu'aux puissances successives de 2, obtenues par la répétition de la répétition, doivent être confrontées non pas la suite des nombre s premiers, mais successivement les suites des puissances successives des nombres premiers :

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5 \ldots\ldots$$
$$3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5 \ldots\ldots$$
$$5^1,\ 5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ 5^5 \ldots\ldots$$

etc.

10. Ainsi :

- d'une part les puissances successives de deux relèvent de la répétition de la répétition du même, comme nous l'avons dit plus haut ;

- d'autre part, ces puissances successives de deux constituent le premier élément d'un algorithme qui rassemble les puissances successives des nombres premiers, car deux est la première multitude première. En d'autres termes les puissances successives des nombres premiers, à partir de trois, se comportent sur le modèle de la suite des nombres de la multiplicité pure, laquelle se développe sur le modèle 1 + 1, "le même ajouté au même et ajouté une fois seulement à le même".

Pour ces deux raisons, bien différentes l'une de l'autre, il convient d'affirmer que les nombres de la multiplicité pure constituent une classe de nombres à part de toutes les autres; car si nous appliquions, à partir de 3, un développement analogue à celui des nombres de la multiplicité pure, nous n'aurions pas les puissances successives de ces nombres, mais les multiples pairs de ces nombres. Ainsi, pour trois :

$$3 + 3 = 6$$
$$6 + 6 = 12$$
$$12 + 12 = 24$$

etc.

ou encore :

$$3^1 + 3^1 = 6$$

$$3^2 + 3^2 = 18$$

$$3^3 + 3^3 = 54$$

etc.

ARTICLE 10 : Nombres 2n et 2n + 1

1. Tout nombre qui n'est ni de la multiplicité pure, ni premier, ni puissance de nombre premier, dérive du produit d'un nombre de la multiplicité pure et d'un ou de plusieurs nombres premiers pris à une certaine puissance ; ou bien dérive du produit de deux ou de plus de deux nombres premiers pris à une puissance quelconque. Nous pouvons donner à ces nombres le nom de composés, bien qu'à l'ordinaire on appelle nombre composé tout nombre qui n'est pas premier. Les premiers nombres composés sont :

$$6 = 2 \times 3$$
$$10 = 2 \times 5$$
$$12 = 2^2 \times 3$$
$$14 = 2 \times 7$$
$$15 = 3 \times 5$$
$$18 = 2 \times 3^2$$

etc.

Le nombre 6 est donc le premier nombre composé et le nombre 15, le premier qui soit le produit de deux nombres premiers pris à la puissance 1.

2. Après les précisions, qu'on aura jugées peut-être un peu trop minutieuses, données à l'article précédent, nous pouvons revenir à la grande division des nombres entiers finis en pairs et en impairs : ceux-ci dérivent exclusivement des nombres premiers et des puissances de ces nombres, à l'exception du nombre deux ; ceux-là, à l'exclusion des nombres de la multiplicité pure, dérivent d'une rencontre de ceux-ci avec des nombres premiers pris à la puissance 1 ou à une puissance supérieure.

Comment signifier, d'une manière générale, la parité ou l'imparité d'un nombre ? Au moyen de la base eurythmologique désignée par le symbole n. L'indication de la parité sera donnée par l'expression :

$$2n$$

et l'indication de l'imparité par l'expression :

$$2n + 1.$$

Quel que soit n, un nombre 2n sera toujours pair et un nombre 2n + 1 toujours impair. L'expression :

$$2n - 1$$

qui, en principe, indique elle aussi un nombre impair, ne saurait néanmoins convenir ; car si la base n a la valeur zéro, l'expression en question sera − 1, c'est-à-dire un nombre négatif. Or l'eurythmologie ignore les nombres négatifs avec lesquels commence l'algèbre. Au contraire, 2n + 1 sera 1 si la base n vaut zéro.

A toute base n correspondent donc deux nombres, l'un pair, l'autre impair et, en conséquence, deux carrés, l'un pair, l'autre impair :

TABLEAU N° 5B

Base n	Nombres pairs		Nombres impairs	
	(2n)	$(2n)^2$	(2n + 1)	$(2n+1)^2$
0	0	0^2	1	$1^2 = 1$
1	2	$2^2 = 4$	3	$3^2 = 9$
2	4	$4^2 = 16$	5	$5^2 = 25$
3	6	$6^2 = 36$	7	$7^2 = 49$
4	8	$8^2 = 64$	9	$9^2 = 81$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

3. Il est bien connu que la suite des nombres carrés donne, par différence d'un de ces nombres carrés et de son prédécesseur, la suite des nombres impairs :

$$1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1 = (2 \times 0) + 1$$
$$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 = (2 \times 1) + 1$$
$$3^3 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = (2 \times 2) + 1$$
$$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = (2 \times 3) + 1$$
$$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = (2 \times 4) + 1$$

etc.

D'une manière générale :

$$K^2 - (K - 1)^2 = 2n + 1$$

avec :

$$n = K - 1$$

4. Deux nombres carrés quelconques, l'un impair et autre que 1, l'autre pair, peuvent, par addition, donner un nombre carré impair. Exemple :

$$9 + 16 = 25 \;;$$

deux nombres carrés quelconques, pairs l'un et l'autre, peuvent par addition donner un nombre carré pair. Exemple :

$$36 + 64 = 100 \;;$$

mais aucun nombre carré n'est égal à la somme de deux nombres carrés impairs. Supposons qu'un nombre carré :

$$(2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1$$

soit la somme des carrés impairs $(2n + 1)^2$ et $(2p + 1)^2$. On aurait, en développant :

$$4n^2 + 4n + 1 + 4p^2 + 4p + 1 = 4q^2 + 4q + 1$$

ou :

$$2 \times (2n^2 + 2n + 2p^2 + 2p + 1) = 2 \times (2q^2 + 2q) + 1$$

ce qui est absurde, le premier membre de l'égalité étant un nombre pair et, le second, un nombre imapir.

5. On observe encore que :

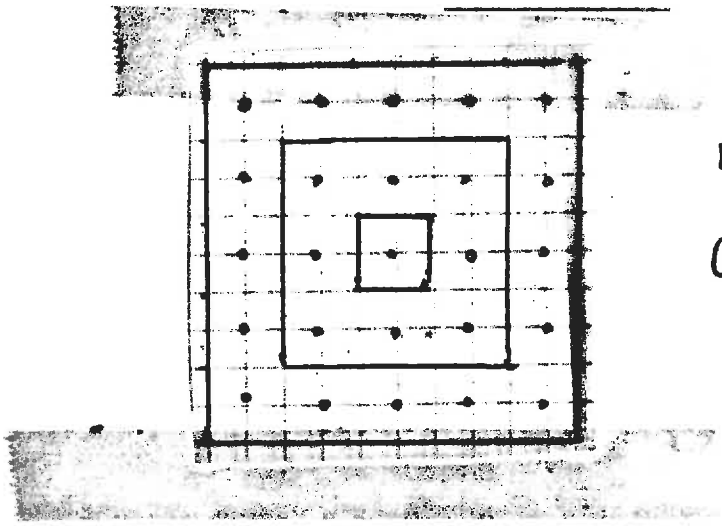
(a) Tout nombre carré pair de base n et de forme $(2n)^2$ est égal à quatre fois la différence entre le double triangle de la base et cette base. Exemple :

- $n = 3$; $(2n)^2 = 36$; $\Delta n = 6$; $36 = 4 \times (12 - 3)$;
- $n = 5$; $(2n)^2 = 100$; $\Delta n = 15$; $100 = 4 \times (30 - 5)$

(b) Tout nombre carré impair de base n et de forme $(2n + 1)^2$ est égal à l'unité plus 8 fois le triangle de la base.

C'est ce que montre le tableau n° 5C. Si l'on représente graphiquement cette propriété, des enceintes apparaissent, dont le nombre est celui du triangle de la base. L'enceinte la plus petite, qui enferme l'unité, est le coeur de la figure :

FIGURE N° 6bis



Base $n = 2$
$\Delta n = 3$
$(2n+1)^2 = 25 = 1 + 8\Delta 2$

TABLEAU N° 5C

n	Δn	$(2n)^2$	$(2n+1)^2$	structure du carré $(2n)^2 = 4 \times n^2$	$(2n+1)^2 = 1 + 8\Delta$
0	0	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	4×0^2	$1 + 8 \times 0$
1	1	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	4×1^2	$1 + 8 \times 1$
2	3	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	4×2^2	$1 + 8 \times 3$
3	6	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	4×3^2	$1 + 8 \times 6$
4	10	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	4×4^2	$1 + 8 \times 10$
5	15	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	4×5^2	$1 + 8 \times 15$
6	21	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	4×6^2	$1 + 8 \times 21$
7	28	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$	4×7^2	$1 + 8 \times 28$
8	36	$16^2 = 256$	$17^2 = 289$	4×8^2	$1 + 8 \times 36$
9	45	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	4×9^2	$1 + 8 \times 45$

6. Construisons deux suites de nombres carrés, l'une commençant par 1^2, l'autre par 0^2, et additionnons les carrés de même rang :

$$\begin{array}{l} 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ \ldots\ldots\ldots\ K^2 \\ 0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \ldots\ldots\ldots\ (K-1)^2 \\ \hline 1,\ 5,\ 13,\ 25,\ 41,\ 61,\ \ldots\ldots\ldots\ K^2 + (K-1)^2 \end{array}$$

La formule générale, comme le montre le tableau n° 5D, est :

$$K^2 + (K-1)^2 = 2\,(K^2 - k) + 1 = 4 \times \Delta(K-1) + 1$$

TABLEAU N° 5D

$1^2 + 0^2$	$= 1$	$= (0 \times 4) + 1$	$= (4 \times \Delta 0) + 1$	
$2^2 + 1^2$	$= 5$	$= (1 \times 4) + 1$	$= (4 \times \Delta 1) + 1$	
$3^2 + 2^2$	$= 13$	$= (3 \times 4) + 1$	$= (4 \times \Delta 2) + 1$	
$4^2 + 3^2$	$= 25$	$= (6 \times 4) + 1$	$= (4 \times \Delta 3) + 1$	
$5^2 + 4^2$	$= 41$	$= (10 \times 4) + 1$	$= (4 \times \Delta 4) + 1$	
$6^2 + 5^2$	$= 61$	$= (15 \times 4) + 1$	$= (4 \times \Delta 5) + 1$	
				etc.

La suite des nombres 1, 5, 13, 25, 41, 61, puis 85, 113, 145, 181 (qui est la somme de 10^2 et de 9^2) etc., est extrêmement importante. Nous la retrouverons plus tard lorsque nous en serons à l'étude des carrés magiques parfaitement réguliers. Il serait prématuré d'en dire le moindre mot dès à présent. Voyons seulement pour le moment que chacun de ces nombres est de la forme :

$$1 + 4N$$

où N est le triangle du nombre le plus petit qui, élevé au carré, donne par addition avec le carré qui lui succède immédiatement, quelque nombre de la suite 1, 5, 13, 25, etc.

7. Bien des suites de nombres ont la forme 1 + 4N, ou 1 + 8N, ou 1 + 6N. Cette forme justifie d'une certaine façon une opération à laquelle nous aurons recours fréquemment et qui est la distinction de l'unité. Etant donné un nombre premier, ou seulement impair, on le décompose en lui soustrayant un. Ce qui reste est alors un nombre pair et par conséquent divisible ; et le reste est parfois, comme c'est ci-dessus le cas (forme 4N), le quadruple ~~le~~ triangle d'un autre nombre auquel on se trouve renvoyé.

8. Si au lieu d'additionner les couples de carrés de la section 6 de cet article, à savoir : 1^2 et 0^2, 2^2 et 1^2, 3^2 et 2^2, etc., nous multiplions l'un par l'autre les carrés ainsi appariés, nous obtenons une suite de produits répondant à la formule générale :

$$K^2 \times (K-1)^2 = 4 \times \left[\Delta(K-1)\right]^2$$

ainsi que le montre le tableau n° 5E.

TABLEAU N° 5E

$1^2 \times 0^2 =$	$0 =$	$0 \times 4 =$	$(0 \times 0) \times 4$	$= (\Delta 0)^2 \times 4$
$2^2 \times 1^2 =$	$4 =$	$1 \times 4 =$	$(1 \times 1) \times 4$	$= (\Delta 1)^2 \times 4$
$3^3 \times 2^2 =$	$36 =$	$9 \times 4 =$	$(3 \times 3) \times 4$	$= (\Delta 2)^2 \times 4$
$4^2 \times 3^2 =$	$144 =$	$36 \times 4 =$	$(6 \times 6) \times 4$	$= (\Delta 3)^2 \times 4$
$5^2 \times 4^2 =$	$400 =$	$100 \times 4 =$	$(10 \times 10) \times 4$	$= (\Delta 4)^2 \times 4$
$6^2 \times 5^2 =$	$900 =$	$225 \times 4 =$	$(15 \times 15) \times 4$	$= (\Delta 5)^2 \times 4$
$7^2 \times 6^2 =$	$1764 =$	$441 \times 4 =$	$(21 \times 21) \times 4$	$= (\Delta 6)^2 \times 4$
$8^2 \times 7^2 =$	$3136 =$	$784 \times 4 =$	$(28 \times 28) \times 4$	$= (\Delta 7)^2 \times 4$
$9^2 \times 8^2 =$	$5184 =$	$1296 \times 4 =$	$(36 \times 36) \times 4$	$= (\Delta 8)^2 \times 4$
$10^2 \times 9^2 =$	$8100 =$	$2025 \times 4 =$	$(45 \times 45) \times 4$	$= (\Delta 9)^2 \times 4$
$11^2 \times 10^2 =$	$12100 =$	$3025 \times 4 =$	$(55 \times 55) \times 4$	$= (\Delta 10)^2 \times 4$
			etc.	

9. Le rapport du carré d'un nombre impair au carré du nombre pair qui le suit immédiatemment régresse régulièrement de 4 à 1, à mesure que s'élèvent les nombres des couples susdits. Nous laisserons de côté, comme hors de notre propos, le rapport de 1^2 à 0^2. Mais nous voyons que :

$$\frac{2^2}{1^2} = 4$$

$$\frac{4^2}{3^2} = 1{,}777\ldots$$

$$\frac{6^2}{5^2} = 1{,}44$$

$$\frac{8^2}{7^2} = 1{,}30612\ldots$$

$$\frac{10^2}{9^2} = 1{,}234567\cancel{8}90\ldots$$

$$\frac{12^2}{11^2} = 1{,}1900\ldots$$

$$\frac{14^2}{13^2} = 1{,}15976\ldots$$

$$\frac{18^2}{17^2} = 1,1211\ldots$$

......

$$\frac{98^2}{97^2} = 1,02072$$

$$\frac{100^2}{99^2} = 1,020304\ldots$$

Les rapports inverses varient naturellement de 0,25 à 1.

ARTICLE 11 : Les équerres

1. J'appelle équerre tout ensemble de trois nombres carrés quelconques qui constituent une relation diophantine, c'est-à-dire une relation telle que l'un des trois nombres carrés est égal à la somme des deux autres :

$$A^2 + B^2 = C^2$$

L'adjectif diophantin peut être appliqué aussi bien aux nombres dont les carrés constituent une équerre qu'à ces nombres carrés eux-mêmes ; mais le mot équerre doit être réservé à la relation diophantine entre nombres carrés.

2. Il existe un nombre illimité d'équerres ; nous subdiviserons cet ensembl en deux sous-ensembles E_1 et E_2. L'un et l'autre de ces ensembles comprennent la même multitude "transfinie" d'équerres : ce sont deux ensembles dénombrables, que l'on peut mettre en rapport biunivoque (1). Davantage encore : chacun des deux sous-ensembles E_1 et E_2 comprend un nombre illimité d'équerres, dites équerres principales qui, à leur tour, donnent naissance à un nombre illimité d'équerres dérivées.

3. Les équerres principales du sous-ensemble E_1, où le nombre A de l'expression

$$A^2 + B^2 = C^2$$

est toujours un impair, sont caractérisées par les valeurs suivantes des trois nombres mis en oeuvre :

$$A = (2n + 1)$$
$$B = 4 \times \Delta n$$
$$C = B + 1$$

Les équerres principales du sous-ensemble E_2, où le nombre A est toujours pair, sont caractérisées par les valeurs que voici :

$$A = 2n$$
$$B = n^2 - 1$$
$$C = B + 2$$

J'illustrerai ce qui précède par des exemples rassemblés dans des tableaux ; mais l'on voit, dès maintenant, comment une équerre principale donne un nombre illimité d'équerres dérivées : il suffit de multiplier les trois termes de cette équerre principale par un nombre entier fini quelconque et, mieux encore, de multiplier successivement chacune des équerres principales par chacun des nombres de la suite naturelle des nombres. On veillera toutefois à éliminer le cas

(1) De la même façon qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs, que de nombres entiers, que de nombres carrés, triangulaires, etc. Mais ce nombre n'est plus fini mais transfini (sans être infini)

échéant la réapparition d'une même équerre.

4. Dans toute équerre principale du sous-ensemble E_1, les nombres A, B, C sont toujours premiers entre eux, ce qui signifie que les nombres (2n + 1), (4 x Δ n) et (B + 1) n'ont jamais de diviseur commun, ce qui Se voit, au contraire, dans toute équerre dérivée d'une telle équerre principale, et réductible par définition à cette équerre principale.

Quant aux nombres A, B, C du sous-ensemble E_2, à savoir (2n), (n^2 - 1) et (B + 2), ils sont premiers entre eux <u>une fois sur deux</u>. Une fois sur deux, ils sont, en effet, divisibles tous trois par 4 ; et quand il en est ainsi, la division renvoie à trois nombres diophantins de l'ensemble E_1. C'est ce que montrent les tableaux n° 5F et 5G, où l'on voit que l'équerre :

$$36 + 64 = 100$$

renvoie à l'équerre :

$$9 + 16 = 25 \ ;$$

ou encore que l'équerre :

$$100 + 576 = 676$$

renvoie à l'équerre :

$$25 + 144 = 169$$

5G

Le tableau n° 5G présente donc une suite régulière d'alternances d'équerres principales et d'équerres <u>pseudo-principales</u>, c'est-à-dire, au fond, d'équerres principales et d'équerres dérivées ; et il est facile de voir, dans le tableau n° 5G, que les équerres pseudo-principales correspondent toujours à une valeur impaire de la base <u>n</u>.

TABLEAU N° 5F

n	A = 2n + 1	B	Δn	4 x Δn = B	C = B + 1	A^2	B^2	$A^2 + B^2 = C^2$
0	1	0	0	0	1	1	0	1 + 0 = 1
1	3	4	1	4	5	9	16	9 + 16 = 25
2	5	12	3	12	13	25	144	25 + 144 = 169
3	7	24	6	24	25	49	576	49 + 576 = 625
4	9	40	10	40	41	81	1600	81 + 1600 = 1681
5	11	60	15	60	61	121	3600	121 + 3600 = 3721
6	13	84	21	84	85	169	7056	169 + 7056 = 7225
7	15	112	28	112	113	225	12544	225 + 12544 = 12769
8	17	144	36	144	145	289	20736	289 + 20736 = 21025
9	19	180	45	180	181	361	32400	361 + 32400 = 32761
								etc.
	SOUS-ENSEMBLE E_1							

TABLEAU N° 5G

n	A = 2n	$(n^2 - 1)$	B	C = B + 2	C^2	A^2	B^2	$A^2 + B^2 = C^2$
0	0	–	–	–	–	–	–	–
1	2	0	0	2	4	4	0	4 + 0 = 4
2	4	4 – 1	3	5	25	16	9	16 + 9 = 25
3	6	9 – 1	8	10	100	36	64	36 + 64 = 100
4	8	16 – 1	15	17	289	64	225	64 + 225 = 289
5	10	25 – 1	24	26	676	100	576	100 + 576 = 676
6	12	36 – 1	35	37	1369	144	1225	144 + 1225 = 1369
7	14	49 – 1	48	50	2500	196	2304	196 + 2304 = 2500
8	16	64 – 1	63	65	4225	256	3969	256 + 3969 = 4225
9	18	81 – 1	80	82	6724	324	6400	324 + 6400 = 6724
								etc.
	SOUS-ENSEMBLE E_2							

Le tableau n° 5F donne, pour $\underline{n}$ de 0 à 9, les équerres principales du sous-ensemble E_1, tandis que le tableau n° 5G donne un mélange régulier d'équerres principales et d'équerres pseudo-principales. Ces deux tableaux pourraient être prolongés indéfiniment ; ils sont ici limités aux dix valeurs de $\underline{n}$, de 0 à 9 (premier domaine de nombres).

5. Il n'y a pas d'équerre pour A = 0, car l'expression $(n^2 - 1)$ serait négative, et nous savons que l'eurythmologie, en principe, ignore les nombres négatifs.

Important est le fait que l'équerre où apparaît le carré de <u>cinq</u> figures dans chacun des deux sous-ensembles sous deux formes différentes. On voit dans le tableau n° 5F :

$$9 + 16 = 25$$

la base $\underline{n}$ étant 1 ; et dans le tableau n° 5G :

$$16 + 9 = 25$$

la base étant 2. D'autre part, les équerres qui précèdent la relation 9 + 16 = 25 et la relation 16 + 9 = 25 sont respectivement :

$$1 + 0 = 1,$$

la base étant 0, et :

$$4 + 0 = 4,$$

la base étant 1. Or ce ne sont point là des égalités comme les autres ou, plus exactement, ce ne sont point là du tout des équerres. Le nombre zéro exprimant l'absence de toute quantité, l'on peut retirer ce "nombre" sans modifier quantitativement les expressions où il figure. C'est pourquoi ni 1 + 0 = 1, ni 4 + 0 = 4 ne sont pas des équerres : ce sont des identités : 1 = 1 et 4 = 4 dénuées d'intérêt du point de vue qui est le nôtre actuellement. Il s'ensuit que la première de toutes les équerres, dans chacun deux deux sous-ensembles E_1 et E_2, est celle qui est exprimée sous deux formes différentes et qui met en oeuvre, une première fois, les nombres 3, 4 et 5 et, une seconde fois, les nombres 4, 3 et 5. De là vient l'importance fondamentale de l'algorithme :

$$\begin{array}{r} 9 + 16 = 25 \\ 16 + \ \ 9 = 25 \\ \hline 25 + 25 = 50 \end{array}$$

6. Bien qu'il soit forcément limité, le tableau n° 5G des équerres du sous-ensemble E_2 fait apparaître que, comme il a été dit plus haut, une équerre sur deux seulement est vraiment principale ; et ce sont toutes celles qui correspondent à une valeur paire de la base n; [redacted] par conséquent toutes celles dont les nombres diophantins sont premiers entre eux. Il convient donc d'éliminer les équerres pseudo-principale et de rassembler toutes les équerres principales, tant celles du sous-ensemble 2 que celles du sous-ensemble 1 dans un tableau récapitulatif unique. Seulement, alors que jusqu'ici, et pour des raisons particulières, nous avons donné le pas aux équerres principales du sous-ensemble E_1 sur celles du sous-ensemble E_2, c'est l'inverse que nous devons faire maintenant, pour des raisons de clarté : c'est ce qu montre le tableau n° 5H où, comme plus haut, la base n couvre le domaine des nombres de 0 à 9.

TABLEAU N°5.H

EQUERRES VRAIMENT PRINCIPALES POUR n de 0 à 9

n	A= $2n$	A= $2n+1$	B= n^2-1	B= $4\times\Delta n$	C= $B+2$	C= $B+1$	$A^2+B^2=C^2$	CARRÉS TOTAUX
0	0		—		—		Néant	—
		1		0		1	$(1^2+0^2=1^2)$	1
1	2		0		2		$(2^2+0^2=2^2)$	4
		3		4		5	$3^2+4^2=5^2$	25
2	4		3		5		$4^2+3^2=5^2$	25
		5		12		13	$5^2+12^2=13^2$	169
3	6		8		10		Pseudo	—
		7		24		25	$7^2+24^2=25^2$	625
4	8		15		17		$8^2+15^2=17^2$	289
		9		40		41	$9^2+40^2=41^2$	1681
5	10		24		26		Pseudo	—
		11		60		61	$11^2+60^2=61^2$	3721
6	12		35		37		$12^2+35^2=37^2$	1369
		13		84		85	$13^2+84^2=85^2$	7225
7	14		48		50		Pseudo	—
		15		112		113	$15^2+112^2=113^2$	12729
8	16		63		65		$16^2+63^2=65^2$	4225
		17		144		145	$17^2+144^2=145^2$	21025
9	18		80		82		Pseudo	—
		19		180		181	$19^2+180^2=181^2$	32761

NB: Ni $1^2+0^2=1^2$ ni $2^2+0^2=2^2$ ne sont des équerres

7. Le tableau n° 5H comprend treize équerres vraiment principales, ou douze seulement si l'on compte pour une équerre seulement les deux équerres qui produisent 25, et qui méritent d'être appelées fondamentales. On sait qu'en Maçonnerie, l'équerre du Vénérable (1) est mesurée par les nombres 3, 4 et 5 dont l'origine pythagoricienne est indiscutable. Dans La Grande Triade (2) René Guénon écrit "qu'une partie notable du symbolisme maçonnique est dérivée directement du pythagorisme, par une "chaîne" (initiatique) ininterrompue à travers les Collegia Fabrorum romains et les corporations de constructeurs du moyen âge". A ce propos l'on peut remarquer que $3 + 4 + 5 = 12$, que $3 \times 4 \times 5 = 60 = 5 \times 12$, et que le produit des carrés de ces trois nombres est encore plus significatif~~s~~, puisqu'il donne le nombre traditionnellement assigné à la circonférence (le nombre 10 étant neutre) :

$$3^2 \times 4^2 \times 5^2 = 10 \times 360$$

8. Toute équerre vraiment principale donne naissance [redacted] à un nombre illimité d'équerres dérivées. Il suffit, pour les trouver, de multiplier ses trois nombres carrés par un même nombre G, lequel peut prendre toutes les valeurs entières finies à partir de deux. Plus radicalement, disposant de tous les nombres diophantins A, B, C, premiers entre eux, du tableau n° 5H, on les multipliera par G. C'est ce procédé que nous adopterons. Ces multiplications, pour les raisons dites plus haut, commenceront avec les nombres diophantins 3, 4 et 5, en laissant de côté la formation 4, 3 et 5, où le nombre A est irrégulièrement plus grand que le nombre B, et qui, d'ailleurs, donnerait les mêmes quantités dérivées. On passera ensuite aux triades :

5, 12, 13
7, 24, 25
8, 15, 17
etc.

telles qu'elles sont données par le tableau n° 5H. Puisque les nombres A, B, C de ce tableau, idéalement et indéfiniment prolongé, sont tous premiers entre eux, jamais le tableau ne présentera une équerre dérivée ; inversément, jamais une équerre obtenue par dérivation ne saurait s'y trouver.

---

(1) Le mot "équerre" est alors pris dans un sens rituel différent de celui que je lui ai donné dans cette étude. L'équerre maçonique (yin), qui permet de tracer le carré (yin), est la compagne du compas (yang), qui permet de tracer le cercle (yang).
(2) Editions de la Table ronde, 1946, p. 146, en note.

9. Pour trouver les nombres diophantins, il existe une méthode bien connue, mais algébrique. On considère deux nombres, x et y tels que $2xy$ soit un carré parfait. On a alors :

$$A = x + \sqrt{2xy}$$
$$B = y + \sqrt{2xy}$$
$$C = x + y + \sqrt{2xy}$$

D'où le tableau n° 5i :

TABLEAU N° 5i

$2xy$	xy	$\sqrt{2xy}$	x	y	A	B	C
4	2	2	1	2	3	4	5
16	8	4	1	8	5	12	13
16	8	4	2	4	6	8	10
36	18	6	1	18	7	24	25
36	18	6	2	9	8	15	17
36	18	6	3	2	9	12	15
...	...	...	...	...	...	...	...

Mais on voit pourquoi cette méthode n'est pas recommandable ; elle ne permet pas de distinguer les nombres diophantins principaux de ceux qui ne le sont pas ; elle les donne tous en vrac, sans discernement. Ainsi les nombres 6, 8, 10, ne sont que les nombres 3, 4, 5 multipliés par 2 ; les nombres 9, 12, 15, ne sont que les nombres 3, 4, 5, multipliés par 3, etc.

10. Le tableau n° 5H appelle diverses remarques ; l'une d'elles concerne le nombre C (de la formation $A^2 + B^2 = C^2$) qui est toujours égal au nombre B augmenté de 1. A partir de la base 1, ces nombres forment la suite :

5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, etc.

Ce qui est remarquable, mais nous ne pouvons nous étendre sur ce sujet, est que ces nombres que nous avons déjà rencontrés sont les coeurs des carrés magiques impairs parfaitement réguliers à 1, 2, 3, 4, etc., enceintes. Un carré magique, on le sait, est un diagramme carré enfermant (c'est le cas le plus simple) tous les nombres, de 1 à un certain nombre carré (impair en l'occurrence) disposés en colonnes verticales et en rangées horizontales (ce qui implique deux grandes diagonales dont l'intersection est le coeur du carré impair), et de telle manière que la somme des nombres verticaux, horizontaux (ainsi que celle des nombres occupant les deux grandes diagonales) soit toujours le même nombre, qui est la solution du carré (appelé "magique" pour cette raison même). La théorie des carrés magiques, que nous aborderons plus tard, est assez complexe ; on distingue d'abord les carrés pairs (dépourvus de "coeur") et les carrés impairs ; et parmi ceux-ci (chacun d'eux comportant un certain nombre d'enceintes entourant le coeur) les carrés qui, tout en étant "magiques", sont irréguliers pour une raison ou pour une autre, ce que nous déterminerons en temps voulu. Restent alors les carrés magiques impairs parfaitement réguliers :

- de 1 à 9 : coeur 5
- de 1 à 25 : coeur 13
- de 1 à 49 : coeur 25

et ainsi de suite. Les nombres extrêmes des carrés étant 1 et le nombre carré $(2n + 1)^2$, on voit que le nombre du coeur d'un carré magique parfaitement régulier est toujours égal à la moitié de la somme des extrêmes. On a donc ainsi successivement :

$$5 = \frac{1 + 9}{2}$$

$$13 = \frac{1 + 25}{2}$$

$$25 = \frac{1 + 49}{2}$$

...

$$K^2 = \frac{1 + (2n + 1)^2}{2} = (2n^2 + 2n) + 1 \quad (1)$$

Ces nombres sont les nombres C = B + 1 du tableau n° 5H.

11. Le nombre A d'une triade diophantine est défini par sa base n et sert à calculer les nombres B et C. Ce nombre A est toujours plus petit que chacun des deux autres, sauf dans trois cas :

- lorsque A est impair et a pour base n = 0 ; car alors A vaut 1 et B vaut 0, le nombre C valant 1 ;
- lorsque A est pair et que :
  - sa base est 1 ; car alors A vaut 2, et B vaut encore 0, le nombre C valant 2 ;
  - sa base est 2 ; car alors A vaut 4, B vaut 3 et C vaut 5 : c'est la relation :

$$16 + 9 = 25$$

(1) C'est une équation du second degré, mais dont les racines sont, comme on dit, "imaginaires", parce que le discriminant (la partie sous radical) est négative (ici, − 4).

Si donc l'on prend soin de spécifier qu'il n'y a équerre authentique que là seulement où A est plus petit que B et que C, dans aucun des trois cas qui viennent d'être examinés il n'y a véritablement équerre. Dans le troisième, l'équerre fondamentale apparaît cependant, mais elle est inversée ; il faut changer 16 + 9 en 9 + 16, où A est plus petit que B.

12. La somme des nombres A, B et C de toute triade diophantine donnée par les tableaux n° 5F et 5G, est

- pour $A = 2n$: $4 \times \Delta n$
- pour $A = (2n + 1)$: $2 \times \Delta(2n + 1)$.

Ces sommes sont rassemblées, à titre documentaire, dans le tableau n° 5J d'abord pour A = 2n, ensuite pour A = 2n + 1. Ce tableau comporte donc deux parties et chacune d'elles [redacted] rassemble les totaux des nombres qui y sont engagés. Ces totaux sont eux-mêmes totalisés. Chacun des nombres [redacted] de ce tableau [redacted] est riche d' une signification eurythmologique certaine.

TABLEAU N° 5 :

1) A = 2n
pour n allant de 0 à 9

n	A	$\frac{A}{2} = n$	Δn	A + B + C =	4 × Δn
0	0	0	0	0 + 0 +	
1	2	1	1	2 + 0 + 2 = 4 =	4 × Δ1
2	4	2	3	4 + 3 + 5 = 12 =	4 × Δ2
3	6	3	6	6 + 8 + 10 = 24 =	4 × Δ3
4	8	4	10	8 + [illegible] + 17 = 40 =	4 × Δ4
5	10	5	15	10 + 25 + 26 = 60 =	4 × Δ5
6	12	6	21	12 + [illegible] + 37 = 84 =	4 × Δ6
7	14	7	28	14 + 48 + 50 = 112 =	4 × Δ7
8	16	8	36	16 + 63 + 65 = 144 =	4 × Δ8
9	18	9	45	18 + 80 + 82 = 180 =	4 × Δ9
Δ9 5 × 9	90 2 × Δ9	Δ9	165 Δ5 × 11	90 + 276 + 294 = 660 = 2 × Δ5 + Δ23 + 6 × 7² = 10 × 6 × 11 = = 12 × 23	4 × 165 4 × (Δ5 × 11)

2) A = 2n + 1
pour n allant de 0 à 9

n	A		ΔA	A + B + C =	2 × ΔA
0	1		1	1 + 0 + 1 = 2 =	2 × Δ1
1	3		6	3 + 4 + 5 = 12 =	2 × Δ3
2	5		15	5 + 12 + 13 = 30 =	2 × Δ5
3	7		28	7 + 24 + 25 = 56 =	2 × Δ7
4	9		45	9 + 40 + 41 = 90 =	2 × Δ9
5	11		66	11 + 60 + [illegible] = 132 =	2 × Δ11
6	13		91	13 + 84 + 185 = 182 =	2 × Δ13
7	15		120	15 + 112 + 113 = 240 =	2 × Δ15
8	17		153	17 + 144 + 145 = 306 =	2 × Δ17
9	19		190	19 + 180 + 181 = 380 =	2 × Δ19
Δ9 5 × 9	100 10 × 10		715 5 × 11 × 13	100 + 660 + 670 = 1430 = 10 × 10 + 10 × 6 × 11 + 10 × 67 = 10 × 11 × 13 =	2 × 715 1430 = 10 × 11 × 13

3) TOTAUX

	190 10 × 19		880 10 × 8 × 11	190 + 936 + 964 = 2090 = 10 × 19 + 8 × 9 × 13 + 4 × 241 = 10 × 11 × 19

13. Peut-être vaut-il la peine d'approfondir notre analyse. Nous savons que, lorsqu'il y a équerre, A est plus petit que B, lequel est plus petit que C :

$$A < B < C$$

Un complément d'analyse consistera donc à étudier :

(a) les sommes :

$$A + B$$
$$A + C$$
$$B + C.$$

(b) Les différences :

$$B - A$$
$$C - A$$
$$C - B$$

et cela quand A est pair et de la forme 2n, et lorsque A est impair et de la forme (2n + 1). Au total, douze analyses, et en se bornant au domaine de 0 à 9, couvertes par la base. Pour être clair et aussi bref que possible, je donnerai tout d'abord les douze formules générales. Ensuite, l'application de ces formules selon la variation de la base de 0 à 9, constituera le tableau n° 5K. Je rappelle que :

- lorsque A = 2 n :

$$B = n^2 - 1$$
$$C = B + 2 = n^2 + 1$$

- lorsque A = 2n + 1 :

$$B = 4 \times \Delta\, n$$
$$C = B + 1$$

14. Nous avons ~~deux~~ donc à considérer :

<u>A = 2 n</u>

(a) <u>Sommes</u> :

(α) $A + B = 2n + (n^2 - 1) = [n \times (n + 2)] - 1$

(β) $A + C = 2n + (n^2 + 1) = (n + 1)^2$

(γ) $B + C = (n^2 - 1) + (n^2 + 1) = 2n^2$

(b) <u>Différences</u> :

(α) $B - A = (n^2 - 1) - 2n = [n \times (n - 2)] - 1$

(β) $C - A = (n^2 + 1) - 2n = (n - 1)^2$

(γ) $C - B = (n^2 + 1) - (n^2 - 1) = 2$

<u>A = 2n + 1</u>

(a) <u>Sommes</u> :

$$(\alpha)\quad A + B = (2n + 1) + (4 \times \Delta n)$$

$$(\beta)\quad A + C = (2n + 1) + (4 \times \Delta n) + 1 = [2 \times (n + 1)] + (4 \times \Delta n)$$

$$(\gamma)\quad B + C = (4 \times \Delta n) + [(4 \times \Delta n) + 1] = (8 \times \Delta n) + 1$$

$$= (2n + 1)^2 = A^2$$

(b) <u>Différences</u> :

$$(\alpha)\quad B - A = (4 \times \Delta n) - (2n + 1)$$

$$(\beta)\quad C - A = [(4 \times \Delta n) + 1] - (2n + 1) = (4 \times \Delta n) - 2n$$

$$= 2 \times [(2 \times \Delta n) - n]$$

$$(\gamma)\quad C - B = [(4 \times \Delta n) + 1] - (4 \times \Delta n) = 1$$

Le tableau n° 5K rassemble tous les résultats obtenus par l'application de ces formules à A = 2n et à A = 2n + 1, la base <u>n</u> allant de 0 à 9. Comme plus haut, les deux parties sont suivies de totaux, eux-mêmes totalisés en fin de page. Et ici encore il faut dire que <u>les nombres ainsi rassemblés ont une valeur eurythmologique de premier ordre</u>.

TABLEAU N° K

1) $A = 2n$
pour n allant de 0 à 9

n	A + B = $2n + [(n^2-1)]$	A + C = $(n+1)^2$	B + C = $2 + n^2$	B − A = $[n \times (n-2) - 1]$	C − A = $(n-1)^2$	C − B = 2
0	—	—	—	—	—	—
1	2 + 0 = 2	2 + 2 = 4	0 + 2 = 2	—	2 − 2 = 0	2 − 0 = 2
2	4 + 3 = 7	4 + 5 = 9	3 + 5 = 8	—	5 − 4 = 1	5 − 3 = 2
3	6 + 8 = 14	6 + 10 = 16	8 + 10 = 18	8 − 6 = 2	10 − 6 = 4	10 − 8 = 2
4	8 + 15 = 23	8 + 17 = 25	15 + 17 = 32	15 − 8 = 7	17 − 8 = 9	17 − 15 = 2
5	10 + 24 = 34	10 + 26 = 36	24 + 26 = 50	24 − 10 = 14	26 − 10 = 16	26 − 24 = 2
6	12 + 35 = 47	12 + 37 = 49	35 + 37 = 72	35 − 12 = 23	37 − 12 = 25	37 − 35 = 2
7	14 + 48 = 62	14 + 50 = 64	48 + 50 = 98	48 − 14 = 34	50 − 14 = 36	50 − 48 = 2
8	16 + 63 = 79	16 + 65 = 81	63 + 65 = 128	63 − 16 = 47	65 − 16 = 49	65 − 63 = 2
9	18 + 80 = 98	18 + 82 = 100	80 + 82 = 162	80 − 18 = 62	82 − 18 = 64	82 − 80 = 2
	90 + 276 = 366 6 × 61	90 + 294 = 384 8 × 48	276 + 294 = 570 10 × 3 × 19	273 − 84 = 189 9 × 21	294 − 90 = 204 12 × 17	294 − 276 = 18 = 3 × 6

2) $A = 2n + 1$
pour n allant de 0 à 9

n	A + B = $(2n+1) + [4 \times \Delta n]$	A + C = $[2 \times (n+1)] + 4 \Delta n$	B + C = $(2n+1)^2 = A^2$	B − A = $(4 \times \Delta n) - (2n+1)$	C − A = $2 \times [(2 \times \Delta n) - n] = 2 \times n^2$	C − B = 1
0	1 + 0 = 1	1 + 1 = 2	0 + 1 = 1	—	1 − 1 = 0	1 − 0 = 1
1	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	4 − 3 = 1	5 − 3 = 2	5 − 4 = 1
2	5 + 12 = 17	5 + 13 = 18	12 + 13 = 25	12 − 5 = 7	13 − 5 = 8	13 − 12 = 1
3	7 + 24 = 31	7 + 25 = 32	24 + 25 = 49	24 − 7 = 17	25 − 7 = 18	25 − 24 = 1
4	9 + 40 = 49	9 + 41 = 50	40 + 41 = 81	40 − 9 = 31	41 − 9 = 32	41 − 40 = 1
5	11 + 60 = 71	11 + 61 = 72	60 + 61 = 121	60 − 11 = 49	61 − 11 = 50	61 − 60 = 1
6	13 + 84 = 97	13 + 85 = 98	84 + 85 = 169	84 − 13 = 71	85 − 13 = 72	85 − 84 = 1
7	15 + 112 = 127	15 + 113 = 118	112 + 113 = 225	112 − 15 = 97	113 − 15 = 98	113 − 112 = 1
8	17 + 144 = 161	17 + 145 = 162	144 + 145 = 289	144 − 17 = 127	145 − 17 = 128	145 − 144 = 1
9	19 + 180 = 199	19 + 181 = 200	180 + 181 = 361	180 − 19 = 161	181 − 19 = 362	181 − 180 = 1
	100 + 660 = 760 = 10 × 4 × 19	100 + 670 = 770 = 10 × 7 × 11	660 + 670 = 1330 10 × 7 × 19	660 − 99 = 561 3 × 11 × 17	670 − 100 = 570 = 10 × 3 × 19	670 − 660 = 10 = 2 × 5

3) TOTAUX

90 + 276 = 366 100 + 660 = 760	90 + 294 = 384 100 + 670 = 770	276 + 294 = 570 660 + 670 = 1330	273 − 84 = 189 660 − 99 = 561	294 − 90 = 204 670 − 100 = 570	294 − 276 = 18 670 − 660 = 10
190 + 936 = 1126	190 + 964 = 1154	936 + 964 = 1900	933 − 183 = 750	964 − 190 = 774	964 − 936 = 28

1126 + 2864 = 4080
= 16 × 5 × 51

2861 − 1309 = 1552
$4^2 \times 97$